

Énoncé

Exercice sur 6 points

L'objet de cet exercice est l'étude de l'arrêt d'un chariot sur un manège, à partir du moment où il entre dans la zone de freinage en fin de parcours.

On note t le temps écoulé, exprimé en secondes, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage, exprimée en mètres, en fonction de t , à l'aide d'une fonction notée d définie sur $[0 ; +\infty[$.

On a ainsi $d(0) = 0$.

Par ailleurs, on admet que cette fonction d est dérivable sur son ensemble de définition. On note d' sa fonction dérivée.

Partie A

Sur la figure (fig. 2) ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative C_d de la fonction d ;
- la tangente T à la courbe C_d au point A d'abscisse 4,7 ;
- l'asymptote Δ à C_d en $+\infty$.

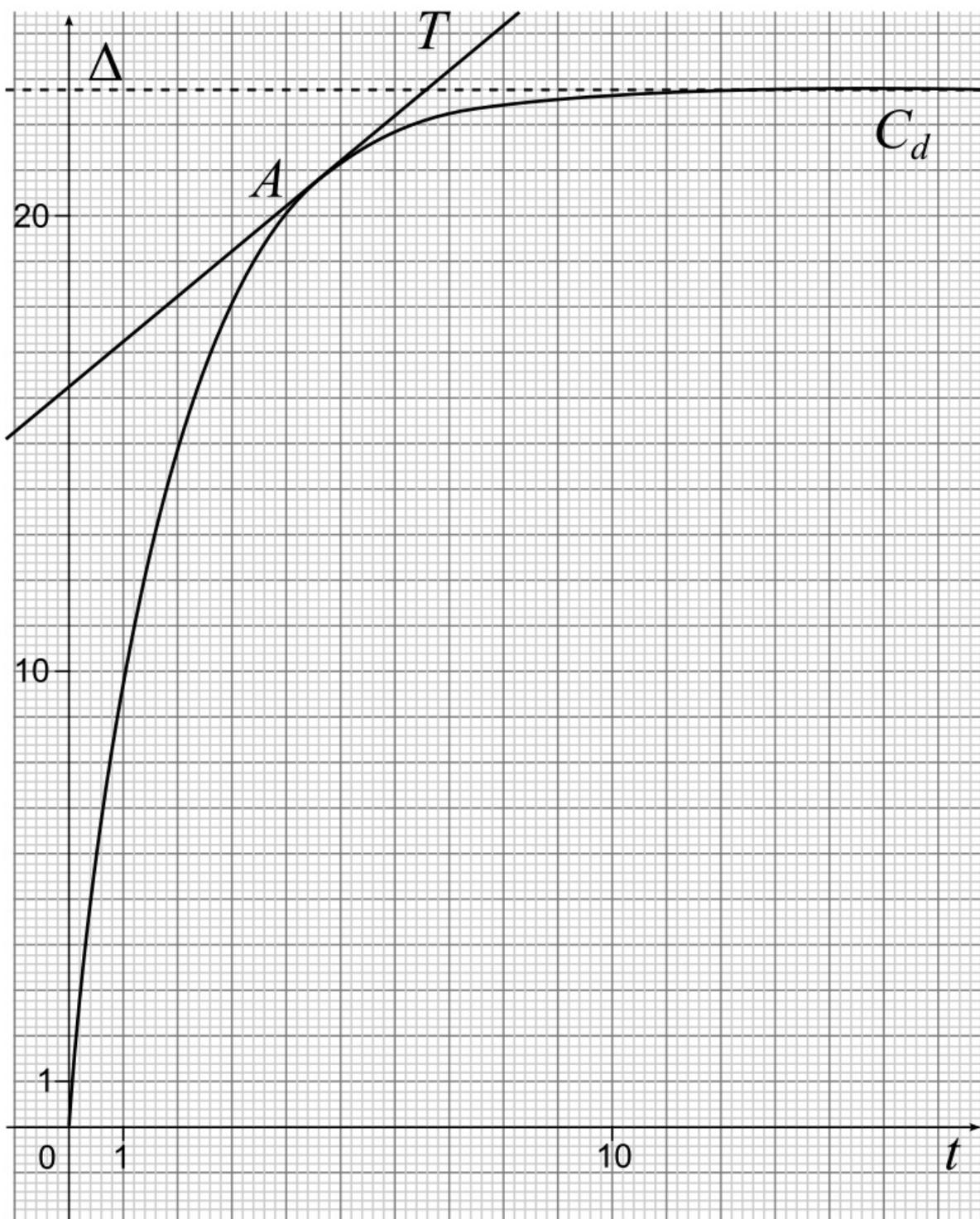


Fig. 2

Dans cette partie, aucune justification n'est attendue.

Avec la précision que permet le graphique, répondre aux questions ci-dessous.

D'après ce modèle :

1. Au bout de combien de temps le chariot aura-t-il parcouru 15 m dans la zone de freinage ?
2. Quelle longueur minimale doit-être prévue pour la zone de freinage ?
3. Que vaut $d(4,7)$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On rappelle que t désigne le temps écoulé, en secondes, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètres par seconde ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$), en fonction de t , par une fonction v définie sur $[0 ; +\infty[$.

On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée ;

• la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,6y = e^{-0,6t},$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y .

On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 m.s^{-1} , c'est-à-dire $v(0) = 12$.

1. a. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + 0,6y = 0$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0 ; +\infty[$.

b. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = te^{-0,6t}$.

Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).

c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0 ; +\infty[$.

d. En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}.$$

Dans cette question, on étudie la fonction v sur $[0 ; +\infty[$.

2. a. Montrer que pour tout réel $t \in [0 ; +\infty[$, $v'(t) = (-6,2 - 0,6t)e^{-0,6t}$

b. En admettant que :

$$v(t) = 12e^{-0,6t} + \frac{1}{0,6} \times \frac{0,6t}{e^{0,6t}}, \text{ déterminer la limite de } v \text{ en } +\infty.$$

c. Étudier le sens de variation de la fonction v et dresser son tableau de variation complet. Justifier.

d. Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une solution unique α , dont on donnera une valeur approchée au dixième.

3. Lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde, un système mécanique se déclenche, permettant son arrêt complet. Déterminer au bout de combien de temps ce système entre en action. Justifier.

Partie C

On rappelle que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}.$$

On admet que pour tout réel t dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$d(t) = \int_0^t v(x) dx.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la distance parcourue par le chariot entre les instants 0 et t est donnée par :

$$d(t) = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}.$$

2. On rappelle que le dispositif d'arrêt se déclenche lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde.

Déterminer, selon ce modèle, une valeur approchée au centième de la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage avant le déclenchement de ce dispositif.