

Énoncé

Exercice sur 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; i, j, k)$.

On considère :

- les points $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \text{ avec } t \in \mathbb{R}; \\ z = 3 - t \end{cases}$$
- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d' : \begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s \text{ avec } s \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 2s \end{cases}$$

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S(-\frac{1}{2}; 1; 4)$.
2. a. Montrer que le vecteur $n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
 b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
 $x + 2y + 4z - 7 = 0$
 c. Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. a. Démontrer que le point $H(-1; 0; 2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) .
 b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment $[CS]$. On a donc $\overrightarrow{CM} = k \overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0; 1]$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k .
2. Existe-t-il un point M sur le segment $[CS]$ tel que le triangle MAB soit rectangle en M ?