Énoncé

Exercice sur 5 points

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.
Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».
Suite à la publication des résultats de l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

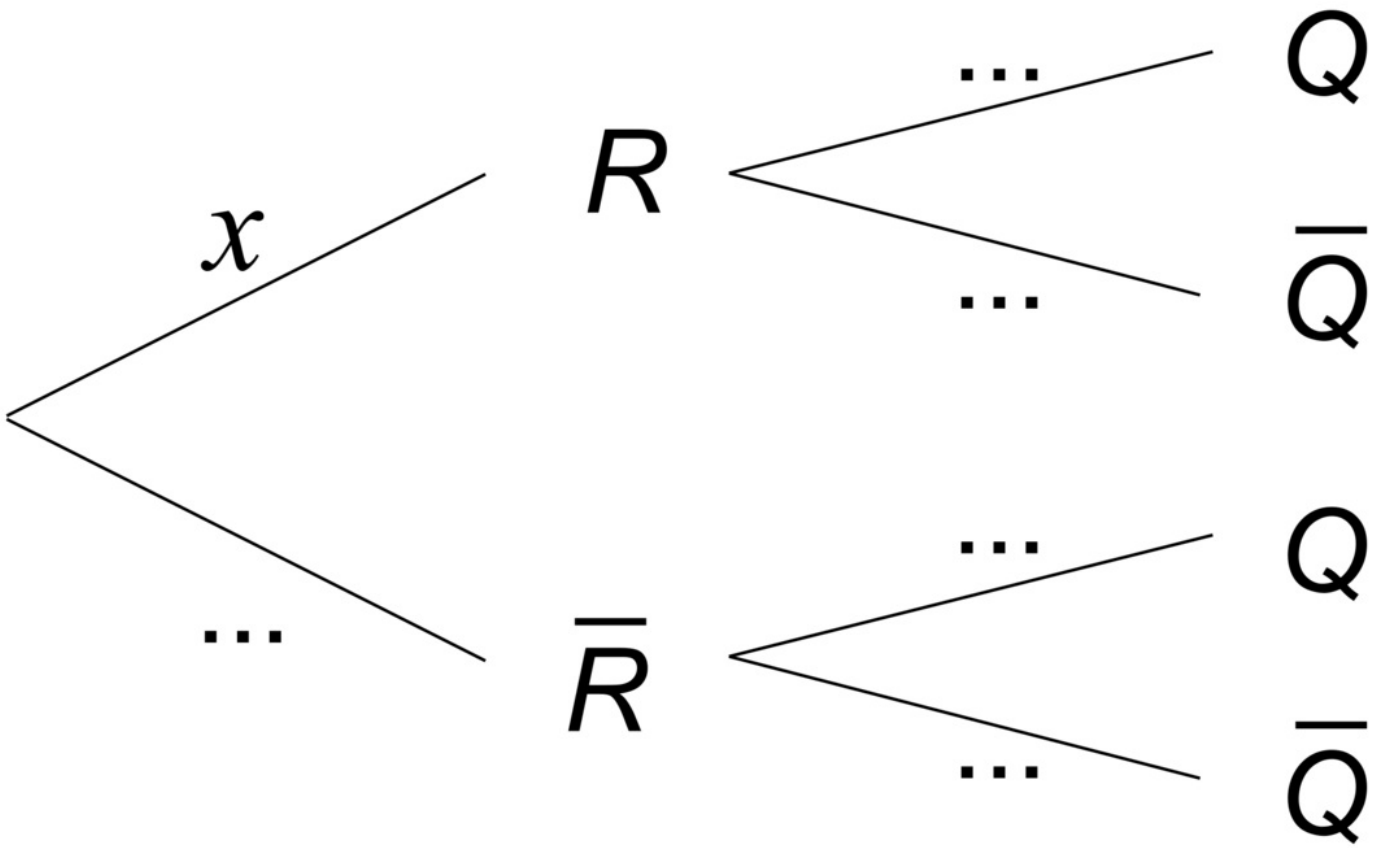
On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.
On note R l'événement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'événement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».
Pour un événement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\bar{A}$ son événement contraire.
Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\bar{R}}\left(\bar{Q}\right)$.

2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.

b.
Montrer que $x = 0{,}9$.



3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?

4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615). La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats. À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?

5. On interroge au hasard dix étudiants. Les variables aléatoires N_1, N_2, ..., N_{10} modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).
Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$. Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.

6.
On considère la variable aléatoire $M = \frac{S}{10}$.

a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?

b. Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}47355$.

c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

© 2000-2025, Miscellane