Énoncé

Exercice sur 7 points

Dans le cadre d'un essai clinique, on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie. L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicaments présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.
Les parties A et B sont indépendantes.

Les deux parties de cet exercice sont bien signalées comme étant indépendantes. Il ne faut donc pas hésiter à commencer par la partie B si le candidat préfère traiter les suites avant les questions sur la fonction proposée, car cela n'aura pas d'impact sur la réussite ni la rédaction de cet exercice.

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient. On modélise la quantité de médicaments présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $f(t) = 3te^{-0,5t+1}$, où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;10]$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0;10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$.

C'est la première question de l'exercice et, surtout, c'est la question indispensable lors de n'importe quelle étude de fonction. Il faut bien connaître les dérivées usuelles et surtout bien détailler les étapes de calcul sur sa copie, car la réponse est donnée. Ce qui est évalué, ce sont les calculs.

1. b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;10]$.

C'est une question très classique lors de l'étude d'une fonction. Il faut penser à bien utiliser la formule de la question précédente (même sans avoir réussi la question 1.a) et bien détailler les inéquations qui permettent d'obtenir le signe de la dérivée. Il faut également penser à calculer les valeurs remarquables pour compléter dans sa totalité le tableau de variations demandé dans cette question.

1. c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicaments présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité maximale ?

Penser à bien justifier votre réponse en vous appuyant sur le tableau de variations construit à la question précédente.

2. a. Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[0;2]$ et dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Cette question nécessite l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires. C'est une question très classique et qui est toujours formulée de la même manière lors des études de fonction ; il faut donc la reconnaître pour directement se lancer dans le TVI.

On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution, notée β, sur l'intervalle $[2;10]$ et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

2. b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicaments présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg. Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Cette dernière question vient clôturer cette première partie. Il faut donc utiliser toutes les questions précédentes pour comprendre ce qui est attendu et observer toutes les réponses trouvées pour répondre à cette fin de problème.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament, puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que, lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicaments dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après l'injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicaments, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 de médicaments (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

Il faut bien lire l'énoncé et tirer du texte toutes les informations et les valeurs nécessaires au calcul demandé. On demande ici un calcul de pourcentage sans oublier l'injection à la fin de l'heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

À nouveau, il faut prendre le temps d'interpréter mathématiquement les différentes informations de cette partie. Il faut faire attention au sens opératoire des mots utilisés et bien expliquer comment obtenir cette formule.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : u_n
$\leqslant$
 $u_{n+1} < 6$.

Ici, l'exercice demande clairement de rédiger un raisonnement par récurrence. Il faut donc s'appliquer à rédiger chaque étape du raisonnement et prendre le temps de bien détailler tous les calculs dans la partie « hérédité ».

3. b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Il faut maitriser les propriétés des suites convergentes. C'est une question classique lors de l'étude d'une suite, surtout en prolongement d'un raisonnement par récurrence qui donne l'encadrement des valeurs de la suite. On utilise les informations obtenues précédemment pour répondre à cette question en justifiant.

3. c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Les questions s'enchainent de manière classique à nouveau. Il faut ici résoudre l'équation obtenue grâce au théorème du point fixe, en détaillant les calculs.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

4. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

La question précise que la suite est géométrique et qu'il faut le démontrer. Il faut donc utiliser la définition d'une suite géométrique et l'utiliser pour savoir l'objectif du calcul. Ensuite, il faut effectuer les étapes de calcul pas à pas à partir des informations déjà connues et de ce qu'on cherche à obtenir à la fin.

4. b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Cette question utilise une autre formule de définition d'une suite géométrique qu'il faut absolument connaître, car cette question est très classique dans l'étude d'une suite. À partir de cette formule, on en déduit celle qui correspond à la suite initiale.

4. c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicaments présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg. Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

La recherche de cette question correspond à la résolution d'une inéquation. Il faut utiliser la formule obtenue à la question précédente ainsi que les fonctions usuelles, qui permettent de résoudre des inéquations avec des puissances.
