Énoncé

Partie A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle [5 ; 60] par :
$C(x) = \frac{e^{0,1x} + 20}{x}$

1. On désigne par C' la dérivée de la fonction C.
Montrer que pour tout $x \in [5\,;\,60]$, $C'(x) = \frac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}$.

2.
On considère la fonction f définie sur [5 ; 60] par :
$f(x) = 0,1x^{0,1x} - e^{0,1x} - 20$

a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur [5 ; 60].

b. Monter que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans [5 ; 60].

c. Donner un encadrement à l'unité de α.

d. En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur [5 ; 60].

3. En déduire le tableau de variations de C sur [5 ; 60].

4.
En utilisant la question précédente, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

a. $C(x) = 2$.

b. $C(x) = 5$.

Partie B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec $x \in [5\,;\,60]$.
Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la **partie A**.
Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

La bonne méthode $u_{n+1} = f(u_n)$.

PARTIE A

1. Utiliser la dérivée d'un quotient de deux fonctions.

2.
a. Dériver la fonction f et étudier son signe.

b. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

c. Utiliser la calculatrice.

d. Faire le tableau de signes de $f(x)$ sur [5 ; 60].

3. Remarquer que $C'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.

4.
a. et b. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

PARTIE B

Utiliser les résultats de la **partie A**.
Penser à rédiger une conclusion.