Énoncé

On considère la fonction f définie sur
$\mathbb{R}$
par $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$.
Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$, avec pour unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur
$\mathbb{R}$
par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur
$\mathbb{R}$
. En déduire le signe de la fonction g.

2. Justifier que, pour tout réel x, $e^x - x$ est strictement positif.

PARTIE B

1.

a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Interpréter graphiquement les résultats.

2.

a. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

b. Étudier le sens de variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations.

3.

a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b. À l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C).

La bonne méthode

PARTIE A

1. Dériver la fonction g et étudier le signe de cette dérivée.

2. Utiliser la question précédente.

PARTIE B

1.

a. Factoriser en $+\infty$et utiliser une somme de limites en $-\infty$.

b. Trouver les asymptotes en utilisant la question 1.

2.

a. Calcul simple de la fonction dérivée de f.

b. Étudier le signe de f.

3.

a. Utiliser l'équation de la tangente au point d'abscisse a: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

b. Étudier le signe de la différence entre $f(x)$ et l'équation de la tangente.

4. Tracer le repère. Attention aux unités.

© 2000-2025, Miscellane