Représentations paramétriques et équations cartésiennes. D'après sujet Bac S, Pondichéry, mai 2018

Énoncé

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O\,;i\,;j\,;k\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (2 ; 1 ; 4), (4 ; -1 ; 0), (0 ; 3 ; 2) et (4 ; 3 ; -2).

1. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

3.
Soit M un point de la droite (CD).

a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées (3 ; 3 ; -1) Vérifier que les droites (CD) et (BH) sont perpendiculaires.

c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.

4.

a. Démontrer que le vecteur $n\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale au plan (BCD).

d. Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\frac{1}{3}\ ;\frac{8}{3}\right)$

5. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

La bonne méthode

1. Autrement dit les vecteurs $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont-ils coplanaires ?

2. (CD) est l'ensemble des points M(x ; y ; z) alignés avec C et D.

3.
a. La question précédente permet de caractériser les points de (CD) en fonction d'un paramètre t, on calcule BM^2 en fonction de t, et on détermine la valeur de t qui minimise la fonction.

3.
b. Le produit scalaire est le bon outil.

3.
c. Ce qui précède permet d'affirmer que [BH] est la hauteur du triangle BCD issue de B.

4.
a. Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

4.
b. Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

4.
c. On connaît un point de la droite et un vecteur directeur.

4.
d. Le point d'intersection est élément de (Δ) ce qui contraint ses coordonnées. Et celles-ci vérifient aussi une équation cartésienne de (BCD).

5. Le volume d'un tétraèdre est $V=\frac{B\times h}{3}$ où B désigne la surface de la base et h la hauteur du solide.