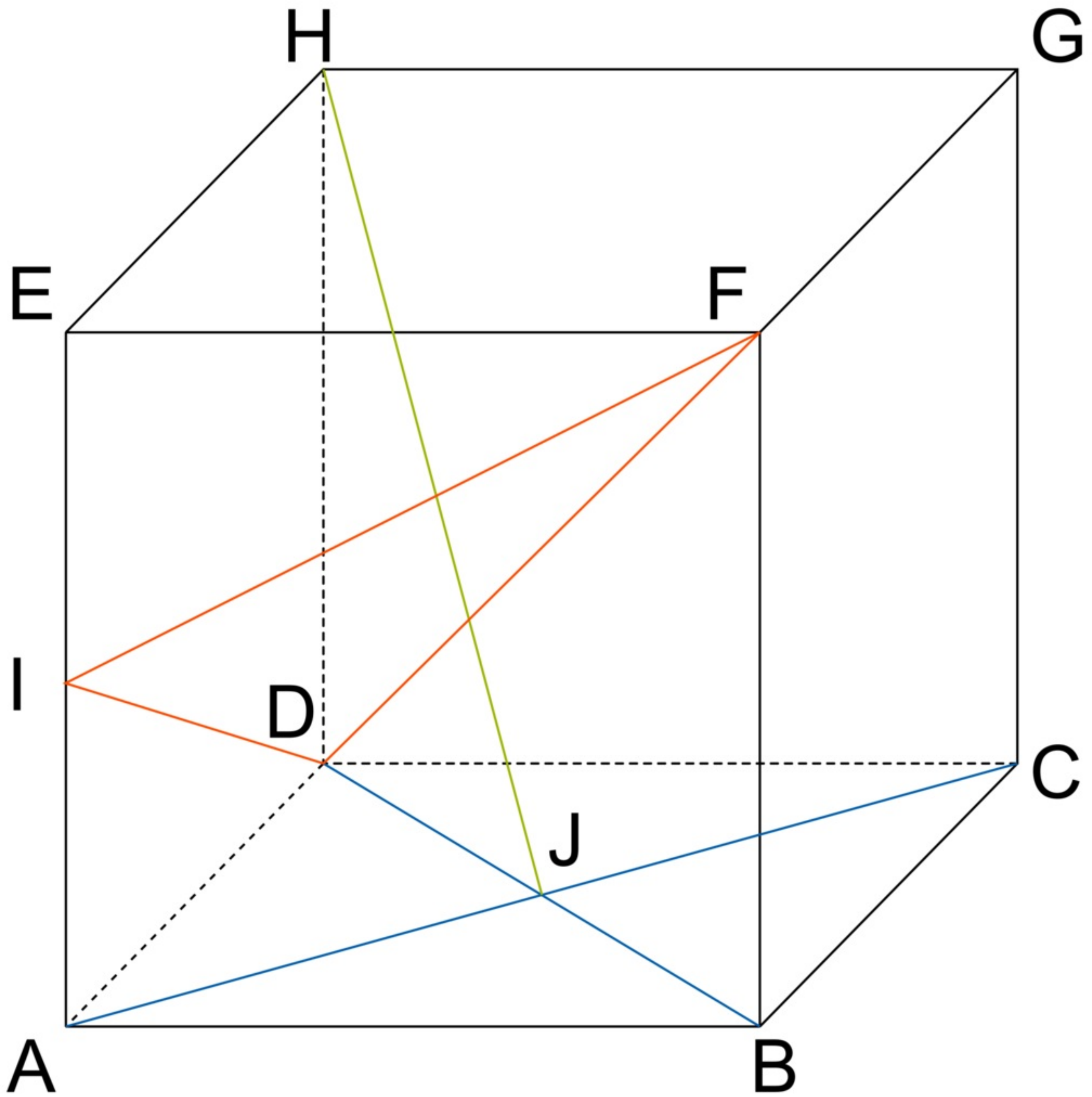
Énoncé

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.



On a placé les points I, J tels que :

• I milieu de [AE] ;

• J centre de la face ABCD.

PARTIE A

Le but de cette partie est d'étudier la position relative de la droite (BH) et du plan (IDF) en utilisant le produit scalaire, sans et avec un repère.

1.

On rappelle que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 est égale à $\sqrt{2}$.

a. En remarquant que $\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DJ}$ et que $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD}$ calculer $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{FD}$.

b. En utilisant la même méthode, calculer $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{DI}$.

c. En déduire les positions relatives de la droite (HJ) et du plan (IDF).

2.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

a. Donner les coordonnées de tous les points de la figure.

b. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{FD}$ En déduire $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{FD}$.

c. En utilisant la même méthode, calculer $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{DI}$.

d. En déduire les positions relatives de la droite (HJ) et du plan (IDF).

PARTIE B

Le but de cette partie est de donner une mesure de l'angle $\widehat{DIF}$.
On se place de nouveau dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Calculer les longueurs ID, IF et DF.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IF}$ de deux manières différentes pour en déduire l'angle $\widehat{DIF}$ arrondi au degré près.

La bonne méthode

PARTIE A

1.

a. Utiliser deux propriétés du produit scalaire, la distributivité et l'orthogonalité de deux vecteurs.

b. Utiliser la relation de Chasles en introduisant les points D et A.

c. Déduire des questions précédentes l'orthogonalité de vecteurs.

2.

a. Lire les coordonnées sur la figure.

b. Utiliser la définition des coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé et la définition du produit scalaire dans un repère : soient $u\,(a,\ b,\ c)$ et $v\,(d,\ e,\ f)$ deux vecteurs de l'espace, alors $u \cdot v = ad + be + cf$.

c. Même méthode qu'au b.

d. Même conclusion qu'au 1.c.

PARTIE B

1. Utiliser la formule de calcul de distance dans un repère orthonormé de l'espace.

2. Utiliser la définition générale du produit scalaire $u \cdot v = \|u\| \times \|v\| \times \cos\left(u,\ v\right)$ et la définition dans un repère.