### **Fiche**

Un couple de lapins nés le premier janvier donne naissance à un autre couple de lapins, chaque mois, dès qu'il a atteint l'âge de deux mois. Les nouveaux couples suivent la même loi de reproduction. Combien y aura-t-il de couples de lapins le premier janvier de l'année suivante, en supposant qu'aucun couple n'ait disparu ?

Pour résoudre ce problème, le mathématicien italien Fibonacci introduit dès 1202 la notion de suite.

Ainsi, si on note  $u_n$  le nombre de couples de lapins au cours du mois (avec  $u_1 = 1$ ), la suite ( $u_n$ ) vérifie la relation de récurrence  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ . On peut alors exprimer  $u_n$  en fonction n de et prévoir le nombre de lapins au bout de quelques mois.

## I. Quand utiliser un raisonnement par récurrence et comment le rédiger ?

On peut utiliser un **raisonnement par récurrence** chaque fois qu'une propriété à démontrer dépend d'un entier naturel n, surtout lorsqu'il semble y avoir un lien simple entre ce qui se passe au rang n et ce qui se passe au rang n+1. Un raisonnement par récurrence se rédige en quatre étapes :

- on commence par énoncer la propriété à démontrer, en précisant pour quels entiers naturels cette propriété est définie ;
- initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au rang initial (qui est souvent 0 ou 1) ;
- **hérédité** : on prouve le caractère héréditaire de la propriété. On suppose que la propriété est vraie pour un entier n arbitrairement fixé et on démontre que la propriété est encore vraie au rang n + 1;
- on conclut en invoquant le principe de récurrence.

# II. Que faut-il savoir sur les suites géométriques ?

Une suite est géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant par le même facteur (la raison, notée q).

D'où la formule de récurrence donnée pour tout entier  $n: u_{n+1} = u_n \times q$ .

Le terme général d'une suite géométrique est :  $u_n = u_0 \times q^n$ .

Enfin la somme des (n + 1) premiers termes d'une suite géométrique  $(u_0 + u_1 + ... + u_n)$  de raison q différente de 1 est égale à :  $u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{q}$ .

Pour tout réel  $q \neq 1$ , on a :  $1 + q + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - a}$ .

## III. Que faut-il savoir sur les suites arithmétiques ?

Une suite est arithmétique quand on passe d'un terme au suivant en ajoutant un même nombre (la raison, notée r).

D'où la formule de récurrence donnée pour tout entier  $n: u_{n+1} = u_n + r$ .

Le terme général d'une suite arithmétique est :  $u_n = u_0 + nr$ .

Cas particulier : pour tout réel n, on a :  $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Pour démontrer qu'une suite  $(u_n)$  est arithmétique, on doit calculer  $u_{n+1} - u_n$  et il faut que le résultat obtenu soit un nombre réel indépendant de n.

# IV. Comment calculer la limite de $q^n$ lorsque q > 0?

Trois cas sont possibles:

- premier cas : si 0 < q < 1, alors  $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ ;
- deuxième cas : si q = 1, alors  $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$ ;
- troisième cas : si q > 1 alors  $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ .

### V. Comment déterminer la limite d'une suite?

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q \neq 0$ . La limite de la suite  $(u_n)$  dépend de son premier terme  $u_0$  non nul et de sa raison q.

- Pour tout réel  $u_0$ , si -1 < q < 1, alors  $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$  et on dit que  $(u_n)$  converge.
- Si  $u_0 > 0$  et si q > 1, alors  $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$  et on dit que  $(u_n)$  diverge.
- Si  $u_0 >$  et si q < -1, alors alors la suite oscille entre des valeurs positives et négatives de plus en plus grandes. Elle ne converge pas.
- Si  $u_0 < 0$  et si q > 1, alors  $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$  et on dit que  $(u_n)$  diverge.
- Si  $u_0$ <0 et si q<-1, alors la suite oscille entre des valeurs positives et négatives de plus en plus grandes. Elle ne converge pas.

Pour étudier la limite d'une suite, on peut exprimer le terme général de la suite en fonction de n et déterminer la limite de ce terme en faisant tendre n vers l'infini.

On peut aussi utiliser les théorèmes de limite par comparaison :

```
• 1<sup>er</sup> cas : Si u_n
```

 $v_n$  et  $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ .

• 
$$2^e$$
 cas : Si  $u_n$ 

 $v_n$  et  $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ .

•  $3^{e}$  cas (Théorème des gendarmes) : Si  $u_n$ 



 $w_n$ 

 $v_n$  et  $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = L$ , alors  $\lim_{n\to+\infty} w_n = L$ .

Enfin, on sait que:

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.
- Une suite est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

# VI. Comment calculer la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique?

**Exemple :** Déterminer la limite de  $S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

 $\underline{1}^{\underline{re}}$  étape: On voit la somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0=1$  et de raison  $q=\frac{1}{2}$ .

On sait que :  $S = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ 

Donc 
$$S = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

 $2^{\underline{c}}$  étape : Comme  $0 < \frac{1}{2} < 1$ , on a  $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ .  $3^{\underline{c}}$  étape : Donc  $\lim_{n \to +\infty} S = 2 - \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$ .

### Propriété:

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et raison q telle que 0 < q < 1.

Soit S la somme des n+1 premiers termes de la suite  $(u_n)$ . Alors  $\lim_{n\to+\infty} S = \frac{u_0}{1-n}$ .

# VII. Qu'est-ce qu'une suite arithmético-géométrique?

**Définition**: On dit qu'une suite  $(u_n)$  est une suite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que :  $u_0$  étant donné, on a pour tout entier  $n: u_{n+1} = au_n + b$ .

Exemple: En 2000, la population d'une ville était de 5 200 habitants.

Chaque année, la population augmente de 2 % mais 150 habitants quittent la ville.

On note  $u_0$  le nombre d'habitants en 2000, et  $u_n$  le nombre d'habitants en 2000 + n.

Démontrer que la suite  $(u_n)$  est une suite arithmético-géométrique.

On sait qu'une augmentation de 2 % correspond à un coefficient multiplicateur de :  $1 + \frac{2}{100} = 1,02$ .

On a  $u_0 = 5\,200$  et pour tout entier  $n: u_{n+1} = 1,02u_n - 150$ .

La suite  $(u_n)$  est donc une suite arithmético-géométrique.

### Cas particuliers:

- Si b = 0 et  $a \neq 0$ , alors la suite est une suite géométrique de raison a;
- Si a = 1, alors la suite est une suite arithmétique de raison b.

### VIII. Algorithmique

Étant donnée une suite  $(q^n)$  avec 0 < q < 1, on veut élaborer un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel  $q^n < a$ , où a est un réel positif donné.

Déterminer un seuil revient à déterminer le plus petit entier n tel que  $q^n < a$ .

La condition d'arrêt revient à continuer à calculer  $q^n$  tant que  $q^n$ 

≥

a.

On a donc l'algorithme :

#### Entrées

Saisir a (nombre réel strictement positif)

Saisir q (nombre réel strictement compris entre 0 et 1)

#### Initialisation

n prend la valeur 0

#### **Traitement**

```
Tant que : q^n
```

\_

n prend la valeur n + 1

Fin de tant que

#### Sortie

Afficher n

#### Exemple:

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel n par :  $u_n = 0.9n$ .

 $(u_n)$  est strictement décroissante, car 0 < q < 1 et  $u_0 = 0.9$ .

Pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que  $u_n < 0.01$ , on exécute le programme. Dans l'algorithme, on tape seuil (0, 01, 0.9) et on obtient 44.

# Histoire des mathématiques : suites numériques

- Archimède a défini dans les années 220 av. J.-C. deux suites permettant d'obtenir de très bonnes valeurs approchées de  $\pi$ .
- **Héron d'Alexandrie** au l<sup>er</sup> siècle après J.-C. utilise un algorithme de calcul qui fournit une suite de valeurs approchées de plus en plus précises de la racine carrée d'un nombre.
- Léonard de Pise (Fibonacci) expose au xIII<sup>e</sup> siècle sa célèbre suite.
- Nicolas Oresme, mathématicien français du XIV<sup>e</sup> siècle a étudié les suites arithmétiques et géométriques, et la somme des termes de certaines d'entre elles.
- L'idée de fonction est plus récente (XVII<sup>e</sup> siècle). Les mathématiciens ont alors montré qu'une suite est une fonction particulière.
- Augustin Cauchy, mathématicien français du XIX<sup>e</sup> siècle a posé les fondements rigoureux de la théorie des suites.
- La conjecture de **Syracuse** (xx<sup>e</sup> siècle) montre une suite avec un comportement particulier, non encore démontré à ce jour.
- Les **fractales** sont apparues au XIX<sup>e</sup> siècle, et le français Benoit Mandelbrot en fait, dans les années 1970, l'objet d'une nouvelle discipline mathématique : la géométrie fractale.

## Zoom sur... les limites des suites

#### Limite d'une somme

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	1	1	1	+∞	+∞	-∞
-------------------------------	---	---	---	----	----	----

Si $\lim_{n\to+\infty} v_n =$	1'	+∞	-∞	+∞	-∞	-∞
Si $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=$	1 + 1'	+∞	-∞	+∞	indéterminée	-∞

# Limite d'un produit

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	1	1 ≠ 0	1 ≠ 0	0	+∞	+∞	-∞
Si $\lim_{n\to+\infty} v_n =$	1'	+∞	-∞	±∞	+∞	-∞	-8
Alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=$	1 × 1′	±∞	±∞	indéterminée	+∞	-∞	+∞

### Limite d'un inverse

$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	l ≠ 0	O <sup>+</sup>	O-	±∞
$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n}=$	1 1	+∞	-∞	О

# Limite d'un quotient

On a :  $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$ , donc on revient à la règle du produit.

### Théorème de limites par comparaison

 $\bullet$  Si  $u_n$ 

 $v_n$  et  $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ .

• Si *u<sub>n</sub>*  $\leq$ 

 $v_n$  et  $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ , alors  $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$ .

### Théorème des gendarmes

Si u<sub>n</sub>

 $w_n$ 

 $v_n$  et  $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=L$  alors  $\lim_{n\to+\infty}w_n=L$ .

Exercice n°1

Exercice n°2

Exercice n°3

Exercice n°4

Exercice n°5

Exercice n°6