Orthogonalité et distances dans l'espace

L'étude de la position relative de droites et de plans dans l'espace se poursuit, et on étend le produit scalaire à l'espace en conservant les propriétés du produit scalaire dans le plan.
Dans tout le chapitre, on munit l'espace du repère $(O\,; i, j, k)$.

I. Quelles sont les propriétés des coordonnées d'un vecteur dans l'espace ?

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x,\ y,\ z)$ tels que $\overrightarrow{OM} = xi + yj + zk$.
Pour tout vecteur u de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x,\ y,\ z)$ tels que $u = xi + yj + zk$.
Propriétés :
Soient $u(a, b, c)$, $v(d, e, f)$ deux vecteurs de l'espace, et k un réel.

- La somme des deux vecteurs u et v se note : $u + v(a + d, b + e, c + f)$.
- Le produit du vecteur u par le scalaire k se note : $ku(ka, kb, kc)$.

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.
- Le milieu du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Exemple : Soit le pavé droit ABCDEFGH. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace. On a, par exemple, A (0, 0, 0) ; C (1, 1, 0) ; G (1, 1, 1). Le vecteur $\overrightarrow{AF}$ a pour coordonnées (1, 0, 1). Le milieu de [FG] a pour coordonnées (1 ; 0,5 ;1).

II. Quelles sont les propriétés du produit scalaire ?

Soient u et v deux vecteurs de l'espace, et les points A, B et C tels que $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{AC}$, avec les points A, B et C coplanaires. Le produit scalaire de u et v (noté $u \cdot v$) est le réel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
Propriétés : On munit l'espace d'un repère orthonormé.

- Soient $u(a, b, c)$ et $v(d, e, f)$ deux vecteurs de l'espace, alors : $u \cdot v = ad + be + cf$.
- Soient deux vecteurs u et v. On a : $u \cdot v = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$.
- On obtient alors également : $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$.

Exemples : Soit un cube ABCDEFGH et I le milieu de [EF]. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.
On a, par exemple, I (0,5 ; 0 ; 1), A (0, 0, 0), B (1, 0, 0) et H (0, 1, 1).

- On a alors : $\overrightarrow{AI}(0,5; 0; 1)$ et $\overrightarrow{BH}(-1, 1, 1)$.
- On peut calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BH} = 0,5 \times (-1) + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 0,5$.

On a : $\overrightarrow{AB}(1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{GC}(0, 0, -1)$. Alors $||\overrightarrow{AB}|| = 1$ et $||\overrightarrow{GC}|| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$.

- On a alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EB}$ et $||\overrightarrow{EB}|| = \sqrt{2}$.
- On peut donc calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{GC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}^2 - 1^2 - 1^2\right) = 0$.

III. Comment caractériser l'orthogonalité entre deux vecteurs ?

Propriétés : On munit l'espace d'un repère orthonormé.
Soient u et v deux vecteurs de l'espace, et trois points A, B et C tels que $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{AC}$.
On dit que les vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si :

- les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires lorsque les points A, B et C sont dans le même plan ;
- le produit scalaire entre les vecteurs u et v est nul : $u \cdot v = 0$.

Exemple : Soit un cube ABCDEFGH.

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont orthogonaux, car les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires et dans le même plan (ABF).
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont également orthogonaux, car $\overrightarrow{AB}(1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{GC}(0, 0, -1)$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GC} = 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times (-1) = 0$.

IV. Comment caractériser la distance entre deux points dans l'espace ?

Propriété : La distance AB entre les deux points A à B est égale à $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Exemple : Soit ABCD un tétraèdre et I milieu de [BC]. Soit $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ un repère orthonormé de l'espace.
On a D (0, 0, 1) et I (0,5 ; 0,5 ; 0). Ainsi $DI = \sqrt{(0,5-0)^2 + (0,5-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1,5}$.

V. Que faut-il retenir sur les mesures d'angle ?

Propriété : Soient u et v deux vecteurs de l'espace, et les points A, B et C tels que $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{AC}$.
Le produit scalaire des deux vecteurs u et v est aussi donné par la formule : $u \cdot v = \|u\| \times \|v\| \times \cos(BAC)$.

Exemple : Soit un cube ABCDEFGH et I milieu de [BF]. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.
$\overrightarrow{AB}(1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{AI}(1; 0; 0, 5)$. Alors et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 1$ et $\left\|\overrightarrow{AI}\right\| = \sqrt{1,25}$.
D'une part, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0,5 = 1$.
D'autre part, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = 1 \times \sqrt{1,25} \times \cos(IAB)$.
Alors$1 \times \sqrt{1,25} \times \cos(IAB) = 1$, d'où $\cos(IAB) = \frac{1}{\sqrt{1,25}}$ et $IAB \approx 26,57°$.

VI. Que faut-il retenir sur la notion de vecteur normal ?

Propriété : Un vecteur normal à un plan est un vecteur non nul. Un vecteur non nul est un vecteur normal d'un plan P de vecteurs directeurs u et v si et seulement s'il est orthogonal aux vecteurs u et v.
Exemple : La notion de vecteur normal permet d'interpréter vectoriellement l'orthogonalité de droites et de plans. Elle permet aussi de déterminer une équation cartésienne d'un plan dans un repère orthonormal de l'espace, en s'appuyant sur la propriété suivante : le plan passant par A et de vecteur normal n est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot n = 0$.

VII. Comment caractériser l'intersection entre une droite et un plan ?

Propriété : On étudie la position relative d'une droite D passant par le point A, de vecteur directeur u et d'un plan P de vecteur normal n.
Si u et n sont orthogonaux, alors la droite D est parallèle au plan P.

- Si, en outre, le point A appartient au plan P, alors la droite D est incluse dans le plan P.
- Sinon, la droite D est strictement parallèle au plan P, et leur intersection est vide.

Si u et n ne sont pas orthogonaux, alors la droite D et le plan P sont sécants, et leur intersection est un point.

- Si, par ailleurs, u et n sont colinéaires, alors la droite D est orthogonale au plan P.

VIII. Comment caractériser l'intersection de deux plans ?

Propriété : On considère deux plans P et P' de vecteurs normaux respectifs n et $\overrightarrow{n'}$.
P et P' sont parallèles si et seulement si n et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires.

- Soit P et P' sont confondus, et leur intersection est un plan.
- Soit P et P' sont strictement parallèles, et leur intersection est vide.

Sinon P et P' sont sécants et leur intersection est une droite.

IX. Comment caractériser la projection orthogonale dans l'espace ?

Propriété : On munit l'espace d'un repère orthonormé. Soient A, B et C trois points de l'espace et H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AH \times AC$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.

Exemple : Soit un cube ABCDEFGH et I milieu de [BF]. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.
On a I (1 ; 0 ; 0,5), A (0, 0, 0) et B (1, 0, 0). De plus, on a : AB = 1 et $AI = \sqrt{1,25}$.
Le projeté orthogonal de I sur la droite (AB) est le point B.
Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = AB \times AB = 1 \times 1 = 1$.
Conséquence : Soit A un point de l'espace et H le projeté orthogonal du point A sur le plan P de vecteur directeur u. Alors u et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux, et donc $u \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

Zoom sur... les propriétés du produit scalaire

Propriété : Formule principale (formule la plus utilisée géométriquement)
Soient u et v deux vecteurs de l'espace, et les points A, B et C tels que $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{AC}$.

Le produit scalaire des deux vecteurs u et v est aussi donné par la formule : $u \cdot v = \|u\| \times \|v\| \times \cos\mathrm{BAC}$.

Propriétés : Soient u, v et w trois vecteurs de l'espace, et k un réel.

• **Symétrie** du produit scalaire : $u \cdot v = v \cdot u$.

• **Bilinéarité** du produit scalaire : $(ku) \cdot v = k \times (u \cdot v) = u \cdot (kv)$.

• **Distributivité** du produit scalaire : $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.

• Le **carré scalaire** du vecteur u est : $u \cdot u = \|u\|^2$.

Propriétés : Formules de polarisation

$u \cdot v = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2\right)$

$u \cdot v = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right)$

Propriétés : Soient u et v deux vecteurs de l'espace.

• Si l'un des deux vecteurs est nul, alors leur produit scalaire $u \cdot v$ est égal à 0.

• u et v sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire $u \cdot v$ est égal à 0.

• S'ils sont non nuls et colinéaires, alors : $|u \cdot v| = \|u\| \times \|v\|$.

Propriétés géométriques : Soient u et v deux vecteurs de l'espace.

• La droite D de vecteur directeur u et la droite D' de vecteur directeur v sont orthogonales si $u \cdot v = 0$.

• La sphère de diamètre [AB] est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$.