Énoncé

On note Z l'ensemble des entiers relatifs.

Dans cet exercice, on étudie l'ensemble S des matrices A qui s'écrivent sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d appartiennent à l'ensemble Z et vérifient : $ad - bc = 1$.

On note I la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A : Quelques exemples de matrices appartenant à l'ensemble S

1. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à l'ensemble S.

Calculer $ad - bc$ et conclure.

2. Montrer qu'il existe exactement quatre matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ appartenant à l'ensemble S ; les expliciter.

En exploitant l'égalité vérifiée par les matrices de S, déterminer les couples d'entiers relatifs a et d solutions.

3.
a) Résoudre dans Z l'équation (E) : $5x - 2y = 1$. On pourra remarquer que le couple (1 ; 2) est une solution particulière de cette équation.

Utiliser le couple (1 ; 2) solution de l'équation (E) et le théorème de Gauss.

b) En déduire qu'il existe une infinité de matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ qui appartiennent à l'ensemble S. Décrire ces matrices.

Faire le lien avec la question précédente.

Partie B : Quelques propriétés des matrices appartenant à l'ensemble S

Dans cette partie, on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble S. On rappelle que a, b, c et d sont des nombres entiers relatifs tels que $ad - bc = 1$.

1. Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux.

Appliquer l'identité de Bezout.

2. Soit B la matrice : $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit AB. On admet que l'on a $AB = BA$.

Calculer le produit des deux matrices.

b) En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

Utiliser la question précédente.

c) Montrer que la matrice A^{-1} appartient à l'ensemble S.

Vérifier que les éléments de B sont des entiers relatifs et que l'égalité $ad - bc = 1$ est vraie pour B.

3. Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $x = dx' - by'$. On admet de même que $y = ay' - cx'$.

Utiliser la matrice B en tant que matrice inverse de la matrice A.

b) On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'. Montrer que $D = D'$.

Sachant que si $D = PGCD(a ; b)$ alors D divise toutes combinaisons linéaires de a et b, montrer que D divise D' et inversement. Conclure.

4. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2019$, $y_0 = 673$ et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$.

En utilisant la question précédente, déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD des entiers x_n et y_n.

Montrer par récurrence que pour tout n, $PGCD(x_n; y_n) = 673$.