Sujet national, juin 2018, exercice de spécialité

Énoncé

5 points

Partie A

On considère l'équation suivante dont les inconnues *x* et *y* sont des entiers naturels :
$x^2 - 8y^2 = 1$. (*E*)

1.
Déterminer un couple solution (x ; y) , où x et y sont deux entiers naturels.

Trouver un couple d'entiers (x ; y) « simples », solution de l'équation (E).

2.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
On définit les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) par :
$x_0 = 1$, $y_0 = 0$, et pour tout entier naturel *n*,
$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

a)
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, le couple (x_n ; y_n) est solution de l'équation (*E*).

Après avoir (par produit de matrices) exprimé x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de
x_n
et
y_n,
faire une démonstration par récurrence, en utilisant «
$x_k^2 - 8y_k^2 = 1$
» comme hypothèse de récurrence.

b)
En admettant que la suite (x_n) est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $x_{n+1} > x_n$.

Montrer que $x_{n+1} - x_n > 0$, en utilisant l'expression de x_{n+1} en fonction de
x_n
et de
y_n
.

3.
En déduire que l'équation (*E*) admet une infinité de couples solutions.

Utiliser les résultats précédents pour conclure.

Partie B

Un entier naturel *n* est appelé un nombre *puissant* lorsque, pour tout diviseur premier *p* de *n*, p^2 divise *n*.

1.
Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.
L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la partie A, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

Tester les entiers inférieurs à 10 et en trouver deux consécutifs qui conviennent.

2.
Soient *a* et *b* deux entiers naturels.
Montrer que l'entier naturel $n = a^2b^2$ est un nombre puissant.

Utiliser l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers et distinguer deux cas : *p* divise *a* et *p* divise *b*.

3.
Montrer que si (x ; y) est un couple solution de l'équation (*E*) définie dans la partie A, alors $x^2 - 1$ et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.

Remarquer que x^2 est puissant, puis exprimer $x^2 - 1$ en fonction de *y*. Conclure.

4.

Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.

Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018.

Faire le lien avec ce qui précède et, avec la méthode de son choix, calculer les premiers termes des suites (x_n) et (y_n) pour en déduire deux nombres consécutifs puissants supérieurs à 2018.