Sujet national, juin 2018, exercice 3

Énoncé

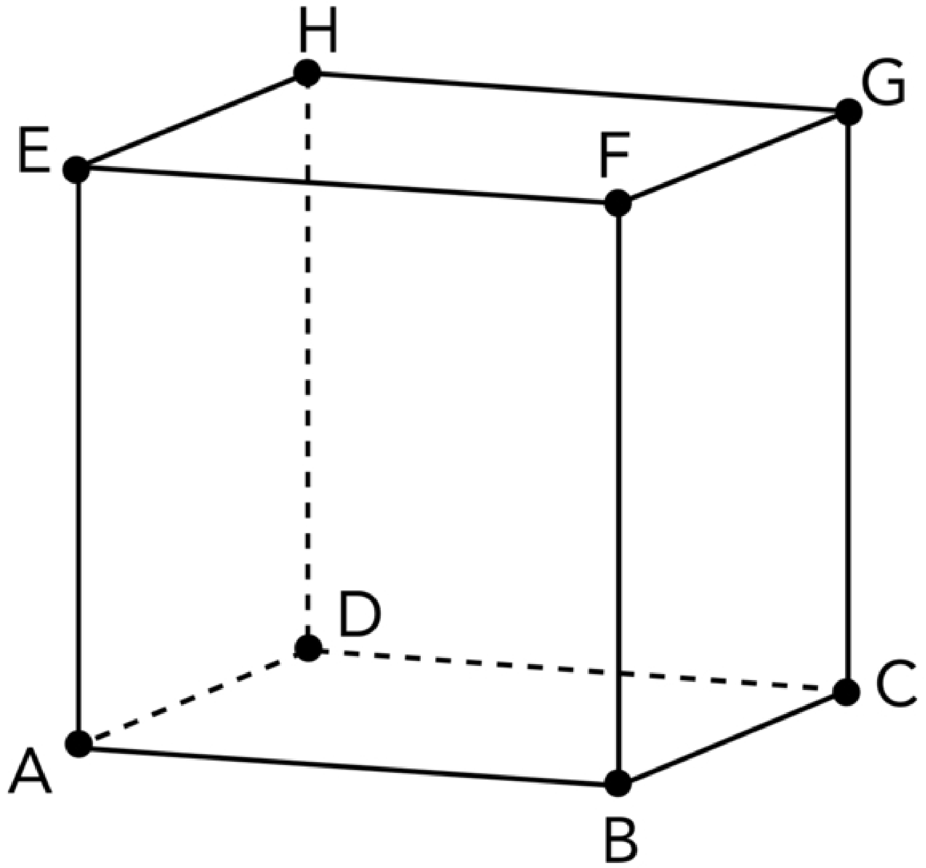
5 points

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.
On rappelle que dans un tétraèdre $MNPQ$, la hauteur issue de M est la droite passant par M orthogonale au plan (NPQ).

Partie A

Étude de cas particuliers

On considère un cube $ABCDEFGH$.



On admet que les droites (AG), (BH), (CE) et (DF), appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre $ABCE$.

a) Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.

Appliquer la définition de la hauteur issue d'un sommet dans un tétraèdre.

b) Les quatre hauteurs du tétraèdre $ABCE$ sont-elles concourantes ?

Étudier la coplanarité des hauteurs trouvées dans la question précédente.

2. On considère le tétraèdre *ACHF* et on travaille dans le repère
$\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

a) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan *ACH* est : $x - y + z = 0$.

Vérifier que les coordonnées de *A*, *C* et *M* (points non alignés) sont solutions de l'équation proposée.

b) En déduire que (*FD*) est la hauteur issue de *F* du tétraèdre *ACHF*.

Vérifier que le vecteur
$\overrightarrow{FD}$
est normal au plan (*ACH*).

c) Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre *ACHF* issues respectivement des sommets *A*, *C* et *H*.
Les quatre hauteurs du tétraèdre *ACHF* sont-elles concourantes ?

Faire de même avec les autres faces de « *ACHF* », puis utiliser la propriété des « grandes diagonales ».

*Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un **tétraèdre orthocentrique**.*

Partie B

Une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre *MNPQ* dont les hauteurs issues des sommets *M* et *N* sont sécantes en un point *K*. Les droites (*MK*) et (*NK*) sont donc orthogonales aux plans (*NPQ*) et (*MPQ*) respectivement.

1.

a) Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.

b) Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.

Utiliser la définition et la propriété d'une droite orthogonale à un plan.

2. Montrer que les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales.

Ainsi, on obtient la propriété suivante :
Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.
(On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont « opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun.)

Utiliser le résultat de la question précédente.

Partie C

Application

Dans un repère orthonormé, on considère les points :
$R\,(-3\,;\,5\,;\,2\,)$, $S\,(1\,;\,4\,;\,-2)$, $T\,(4\,;\,-1\,;\,5)$ et $U\,(4\,;\,7\,;\,3)$.
Le tétraèdre $RSTU$ est-il orthocentrique ? Justifier.

On raisonne par contraposée : trouver deux arêtes non orthogonales et conclure.