Sujet national, juin 2016, exercice 1

Énoncé

6 points

Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste.
Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5 %.
On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
On note :
– A l'événement « le composant provient de la chaîne A » ;
– B l'événement « le composant provient de la chaîne B » ;
– S l'événement « le composant est sans défaut ».

1. Montrer que la probabilité de l'événement S est $P(S) = 0{,}89$.

Appliquez la formule des probabilités totales.

2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

Appliquez la formule des probabilités conditionnelles.

Partie B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut.
Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A.
Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de 0,92.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

Appliquez la formule de l'intervalle de confiance.

2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de 0,02 ?

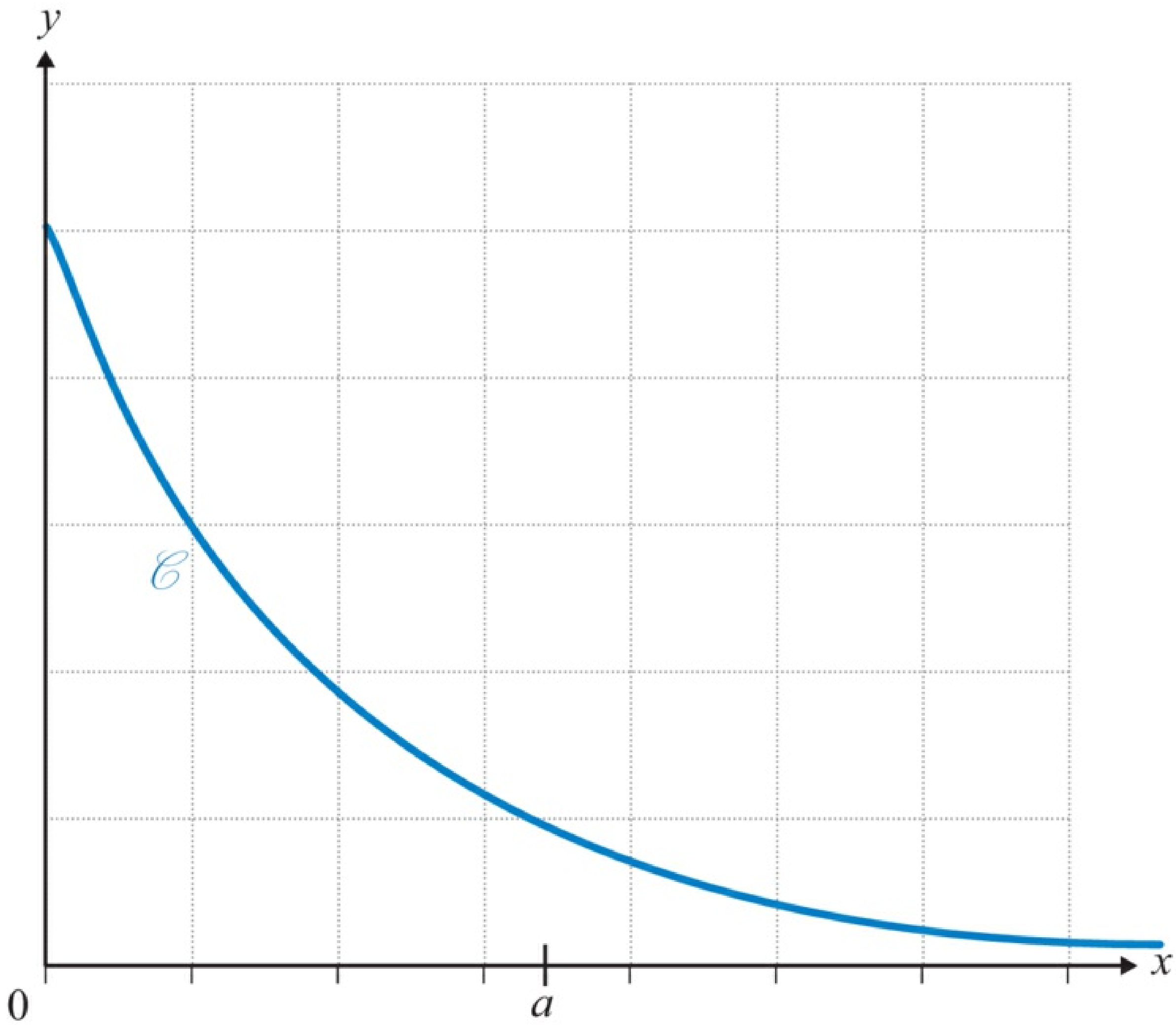
Calculez l'amplitude L de l'intervalle et résoudre $L \leqslant 0{,}02$.

Partie C

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).

On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :
– pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$;
– pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, $P(T \leqslant a) = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

1. La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



a) Interpréter graphiquement où $P(T \leqslant a)$ où $a > 0$.

Interprétez la probabilité donnée sous forme d'intégrale, puis l'intégrale trouvée sous forme d'aire.

b) Montrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$: $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Exprimez la probabilité recherchée sous forme d'une intégrale, puis recherchez une primitive de *f*.

c) En déduire que $\lim_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$.

Utilisez la limite usuelle : $\lim_{u \to -\infty} e^u = 0$.

2. On suppose que $P(T \leqslant 7) = 0{,}5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

Il faut utiliser le résultat du **1. b)** puis résoudre l'équation obtenue.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0{,}099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

a) On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.

Déterminez la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

Traduisez l'énoncé sous la forme d'une probabilité utilisant la variable aléatoire *T*, puis utilisez les résultats des questions précédentes.

b) On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.

Déterminez la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.
Souvenez-vous du cours : la loi exponentielle est « sans mémoire ». Puis utilisez le**C. 3. a)**.

c) Donner l'espérance mathématique E(T) de la variable aléatoire T à l'unité près.

Interprétez ce résultat.
Question de cours : vous devez savoir comment calculer l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.