Sujet national, juin 2014, exercice 2

Énoncé

5 points

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1.

Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.
On note M l'événement « la personne choisie est malade » et T l'événement « le test est positif ».

a) Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

Pour construire l'arbre correspondant à la situation donnée, tenez compte des probabilités de chaque événement.

b) Démontrer que la probabilité $P(T)$ de l'événement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

Privilégiez la formule des probabilités totales car si vous utilisez l'arbre précédent et qu'il est faux, tout est faux. L'arbre permet simplement de vérifier.

c) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.
Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade. »

La question posée revient à déterminer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif est inférieur à 0,5. Appliquez ensuite la formule des probabilités conditionnelles.

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.
À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Appliquez la formule des probabilités totales, puis utilisez la question précédente.

Partie B

La chaîne de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1.

Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale N, μ, σ^2) de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

a) Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.

Cela revient à déterminer $P(890 \leq X \leq 920)$.

b) Déterminer l'entier positif h tel que $P(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) \approx 0,99$ à 10^{-3} près.

Centrez et réduisez la variable aléatoire X, puis utilisez la calculatrice.

2. La chaîne de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97 % de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1 000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1 000 tirages successifs avec remise.
Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.
Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

Vérifiez si les conditions d'application de l'intervalle de fluctuation asymptotique
I_f
sont remplies, puis déterminez cet intervalle. Confrontez la fréquence observée à l'intervalle et concluez.