Sujet national, juin 2014, exercice 1

Énoncé

5 points

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par
$\mathcal{C}_1$
la courbe représentative de la fonction
f_1
définie sur
$\mathbb{R}$
par :
$f_1(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$
.

1. Justifier que
$\mathcal{C}_1$
passe par le point A de coordonnées
$(0\ ;\ 1)$
.

Utilisez la propriété suivante : un point M de coordonnées *x* et *y* appartient à une courbe
C_f
, si et seulement si
$y = f(x)$
.

2. Déterminer le tableau de variation de la fonction
f_1
. On précisera les limites de
f_1
en
$+\infty$
et en
$-\infty$
.

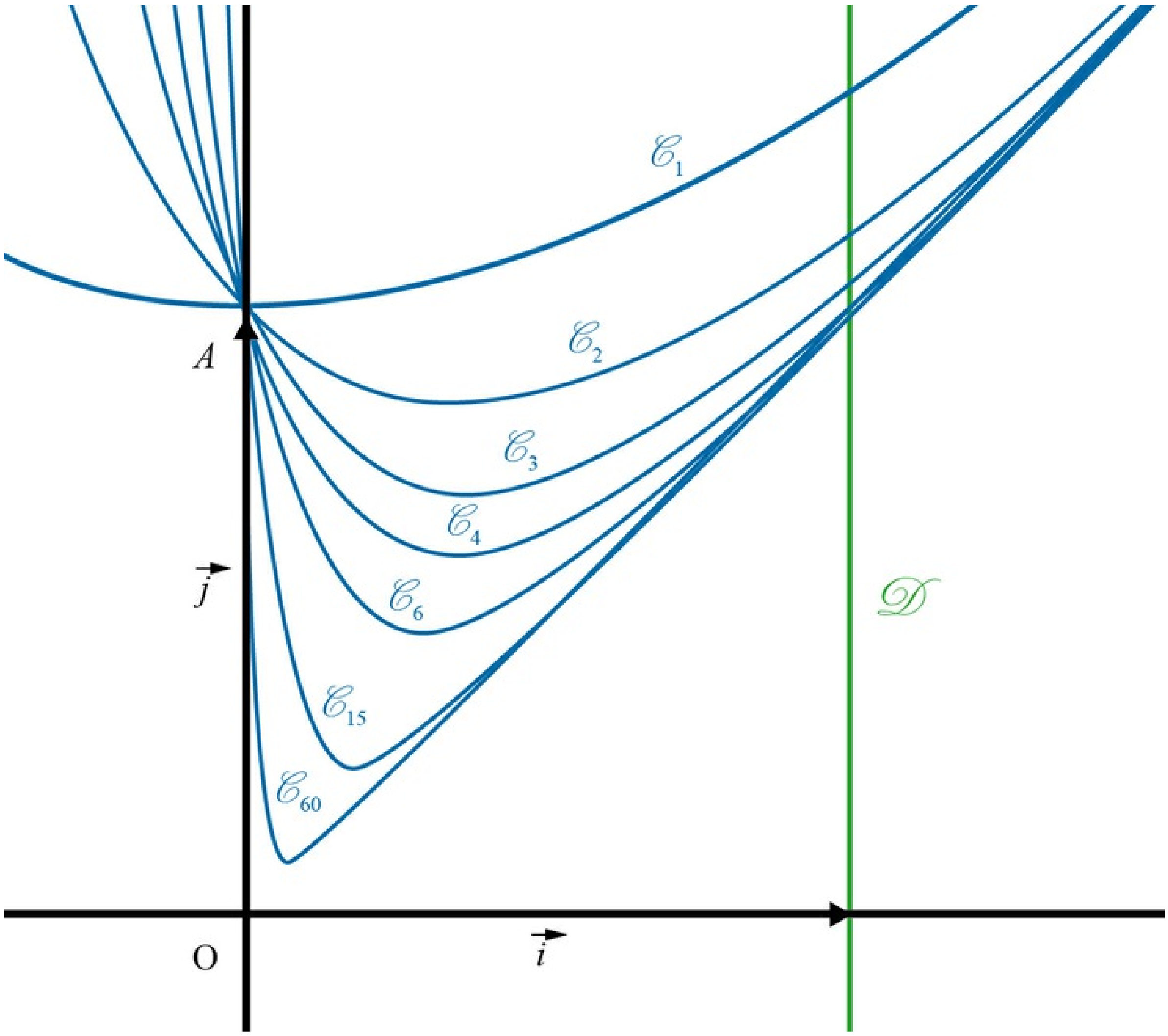
Pour la dérivation, utilisez la formule :
$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$
si *u* est une fonction dérivable.
Pour les limites, utilisez les limites usuelles et dans le cas de la forme indéterminée considérez cette limite :
$\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$
.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite
(I_n)
définie sur
$\mathbb{R}$
, par :
$I_n = \int_0^1 (x + \mathrm{e}^{-nx})\mathrm{d}x$
.

1.
Dans le plan muni d'un repère orthonorme
$(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$
, pour tout entier naturel *n*, on note

$\mathcal{C}_n$
la courbe représentative de la fonction
f_n
définie sur
$\mathbb{R}$
par
$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{-nx}$
.
Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe
$\mathcal{C}_n$
pour plusieurs valeurs de l'entier *n* et la droite
$\mathcal{D}$
d'équation *x* = 1.



a) Interpréter géométriquement l'intégrale
I_n
.

D'après le cours, quand *f* > 0,
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
correspond, en unités d'aire, à l'aire du plan déterminé par le domaine suivant :
$a \leqslant x \leqslant b$
et
$0 \leqslant f(x)$
.
b) En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite
(I_n)
et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

La conjecture sur les variations de la suite et sa limite se déduit d'une considération des aires.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1 :
$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}(1 - e^x)\mathrm{d}x$

.
En déduire le signe de
$I_{n+1} - I_n$

puis démontrer que la suite
(I_n)

est convergente.

Mobilisez les propriétés de linéarité et de positivité de l'intégrale, puis le théorème de convergence.

3. Déterminer l'expression de
I_n
en fonction de *n* et déterminer la limite de la suite
(I_n)

.

Recherchez une primitive de
f_n

puis la limite de l'intégrale obtenue.