Sujet national, juin 2013, exercice de spécialité

Énoncé

5 points

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.
L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant ;
- chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année (2013 + n) et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimez v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.

Lisez attentivement la signification de v_n et c_n pour établir les expressions demandées.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$. On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = AX$. Déterminez, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.
Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

Effectuez le produit matriciel de A par X.

3.

Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculez P

Q et Q
P
. Vous devez en déduire la matrice
P^{-1} en fonction de
Q
.

Le produit demandé vous donne la matrice identité multipliée par un réel, et en vous appuyant sur la définition de la matrice inverse, vous pouvez répondre à la question.

b) Vérifiez que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale
D
que l'on précisera.

Effectuez d'abord le produit
QA

puis
$(QA)P$

et enfin divisez par
6
.

c) Démontrez que pour tout entier naturel
n
supérieur ou égal à 1,
$A^n = PD^nP^{-1}$.

Utilisez la démonstration par récurrence.

4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que :
$v_n = \frac{1}{6}(1 + 5 \times 0,94^n)\,v_0 + \frac{1}{6}(1 - 0,94^n)\,c_0$. Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

Recherchez la limite de
v_n
en $+\infty$ et donnez vos conclusions.