Énoncé

4 points

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1.$

1.

a) Calculez u_1, u_2, u_3 et u_4. Vous pourrez en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

Pour calculer u_i, remplacez dans la relation de récurrence de l'énoncé n par i.

b) Formulez une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

Le calcul précédent nous conduit immédiatement à la conjecture attendue.

2.

a) Démontrez que pour tout entier naturel n,

$u_n \leqslant n + 3$.

Le calcul précédent nous conduit immédiatement à la conjecture attendue.

b) Démontrez que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} (n + 3 - u_n).$

Le résultat de la question **2. a)** permet de conclure.

c) Vous devez en déduire une validation de la conjecture précédente.

3.

On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a) Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

Démontrez que

$$v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$$

.

b) Vous devez en déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

La réponse se déduit de la relation de récurrence donnée au 3.

c) Déterminez la limite de la suite (u_n).

Si $q \in]0;1[$, q^n tend vers O.

4.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \Sigma_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $T_n + \frac{S_n}{n^2}$.

a) Exprimez S^n en fonction de n.

Utilisez la somme des termes d'une suite géométrique.

b) Déterminez la limite de la suite (T_n).

Utilisez les propriétés des limites.