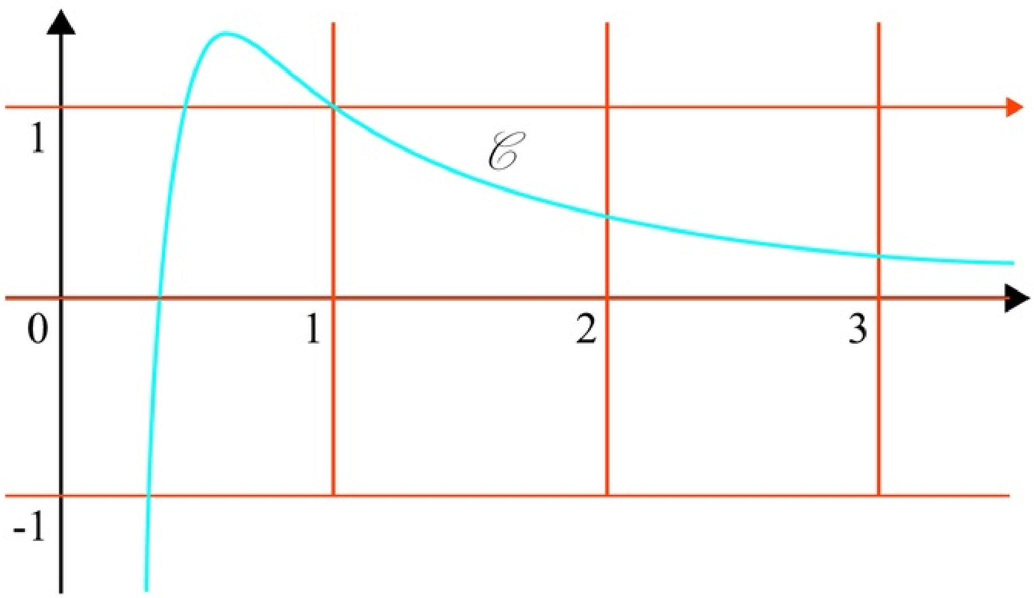
Amérique du Nord, mai 2013, exercice 4

Énoncé

5 points

Soit
f
la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$
et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction
f
dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



1.
a) Étudiez la limite de
f
en 0.

Utilisez les limites usuelles de $\ln(x)$ en
0^+
.

b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? Vous devez en déduire la limite de la fonction
f
en $+\infty$.

Utilisez les propriétés des limites en particulier les sommes et produits de limites.

c) Vous devez en déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

Interprétez graphiquement chacune des deux limites.

2.
a) On note
f'
la fonction dérivée de la fonction
f
sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Démontrez que, pour tout réel
x
appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,
$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.

Utilisez la formule de la dérivée d'un quotient.

b) Résolvez sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.

Vous devez en déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Montrez que le signe de f' est celui de $-1-2\ln(x)$, résolvez l'inéquation demandée, concluez.

c) Dressez le tableau des variations de la fonction f.

En dressant le tableau, n'oubliez pas de placer les bornes et les limites.

3.

a) Démontrez que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont vous préciserez les coordonnées.

Un point appartient à l'intersection de deux ensembles si et seulement si ses coordonnées vérifient simultanément les équations de ces deux ensembles.

b) Vous devez en déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Utilisez le tableau de variation précédent et le point d'intersection trouvé.

4.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I^n l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

a) Démontrez que $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e} - \frac{1}{2}$.

On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = \frac{-2-\ln(x)}{x}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Interprétez l'aire à l'aide d'une intégrale et utilisez la primitive donnée dans l'énoncé.

b) Calculez I^n en fonction de n.

Utilisez la primitive donnée dans l'énoncé.

c) Étudiez la limite de I^n en $+\infty$. Interprétez graphiquement le résultat obtenu.

Utilisez les limites usuelles, $\frac{\ln(x)}{x}$ et $\frac{1}{x^n}$ quand x tend vers $+\infty$.