# Inde, avril 2013, exercice de spécialité

## Énoncé

*5 points*

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux. Pour tout entier naturel $n$, on note $j_n$, le nombre d'animaux jeunes après $n$ années d'observation et $a_n$ le nombre d'animaux adultes après $n$ années d'observation. Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes. Ainsi $j_0$ = 200 et $a_0$ = 500.

On admet que pour tout entier naturel $n$ on a :

$$\begin{cases} j_{n+1} = 0,125\, j_n + 0,525 a_n \\ a_{n+1} = 0,625\, j_n + 0,625 a_n \end{cases}$$

On introduit les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel $n$, $U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1.

a) Montrez que pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = A \times U_n$.

Effectuez le produit de A par $U_n$, puis utilisez la définition de $a_{n+1}$ et de $j_{n+1}$ donnée dans l'énoncé.

b) Calculez le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).

Calculez $U_1$, puis $U_2$ et concluez.

c) Pour tout entier naturel $n$ non nul, exprimez $U^n$ en fonction de $A^n$ et de $U_0$.

Il s'agit d'une récurrence immédiate.

2.

On introduit les matrices suivantes :

$Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) On admet que la matrice Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}$.

Montrez que $Q$

$\times D \times Q^{-1} = A$.

Effectuez le produit de $Q$ par $D$ puis par $Q^{-1}$, à la main ou à la calculatrice, et vous devez trouver $A$.

b) Montrez par récurrence sur $n$ que pour tout entier naturel $n$ non nul : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

Pour la démonstration par récurrence, l'hérédité se prouve en utilisant l'égalité prouvée au **2. a)**.

c) Pour tout entier naturel $n$ non nul, déterminez $D^n$ en fonction de $n$.

Vous obtiendrez la puissance $n$ d'une matrice diagonale $D$ en élevant à la puissance $n$ les éléments diagonaux de $D$.

3.

On admet que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$$

a) Vous devez en déduire les expressions de $j_n$ et $a_n$ en fonction de $n$, puis déterminez les limites de ces deux suites.

Utilisez l'égalité établie au **1. c)** ainsi que l'expression de $A^n$ donnée dans l'énoncé pour déduire $a_n$ et $j_n$ en fonction de $n$. Ensuite, utilisez la propriété du cours donnant la limite de $n$ selon les valeurs de $q$.

b) Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

Les limites trouvées au **3. a)** correspondent aux valeurs de stabilisation de $a_n$ et $j_n$.