Antilles, septembre 2010, exercice 3

Énoncé

On considère la suite de nombres réels
(u_n)

définie sur
$\mathbb{N}$
par
$u_0 = -1$
,
$u_1 = \frac{1}{2}$

et, pour tout entier naturel *n*,
$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

.

1 Calculer
u_2
et en déduire que la suite
(u_n)

n'est ni arithmétique ni géométrique.

2
On définit la suite
(v_n)

en posant, pour tout entier naturel *n* :
$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

.

a) Calculer
v_0
.

b) Exprimer
v_{n+1}
en fonction de
v_n
.

c) En déduire que la suite
(v_n)

est géométrique de raison
$\frac{1}{2}$

.

d) Exprimer
v_n
en fonction de *n*.

3
On définit la suite
(w_n)

en posant, pour tout entier naturel *n* :
$w_n = \frac{u_n}{v_n}$

.

a) Calculer
w_0
.

b) En utilisant l'égalité

$u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$

exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c) En déduire que pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d) Exprimer w_n en fonction de *n*.

4 Montrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5 Pour tout entier naturel *n*, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout *n* de $\mathbb{N}$: $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.