Fiche

C'est en recherchant des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est proportionnelle à la fonction que l'on est conduit à l'étude de la fonction exponentielle. Celle-ci joue un rôle capital en mathématiques, car c'est une fonction de référence : elle intervient dans de nombreuses lois de probabilité.

1. Comment définir la fonction exponentielle ?

Définition

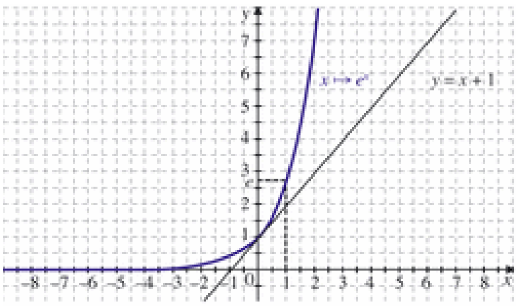
La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur l'ensemble des réels vérifiant les deux conditions suivantes :

- pour tout réel x, exp'(x) = exp(x) et exp(0) = 1. Conséquences : $e^0 = 1$; $e^1 = e \approx 2,718$; $e^{-1} = \frac{1}{e}$ et $e^{0,5} = \sqrt{e}$;
- pour tout réel x on a : $e^x \times e^{-x} = 1$.

Dérivée, courbe représentative

La fonction exponentielle est égale à sa dérivée.
La fonction exponentielle est positive, donc sa fonction dérivée aussi, et elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Courbe représentative de la fonction exponentielle



Dérivée de la fonction e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, alors pour tout réel x appartenant à I on a : $(e^u)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$.

[Exercice n°2](#)

[Exercice n°3](#)

2. Quelles sont les propriétés à retenir ?

Propriétés :

- relation fonctionnelle : quelque soient les réels x et y on a : $e^x \times e^y = e^{x+y}$;
- quelque soient les réels x et y on a $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$;
- pour tout nombre réel x on a : $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$;
- pour tout nombre réel x on a : $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$;
- pour tout nombre réel x et pour tout entier n on a : $(e^x)^n = e^{nx}$;
- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Exercice n°4

À retenir

- La fonction exponentielle est l'unique fonction f dérivable sur l'ensemble des réels qui est sa propre dérivée et qui vérifie $f(0) = 1$.
- Pour tout réel x on a : $e^x \times e^{-x} = 1$.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, alors pour tout réel x appartenant à I on a : $(e^u)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
- $\mathrm{Exp}(x) > 0$ pour tout réel x.
- La limite en plus l'infini de e^x / x est égale à $+\infty$, et celle en moins l'infini de xe^x est 0.