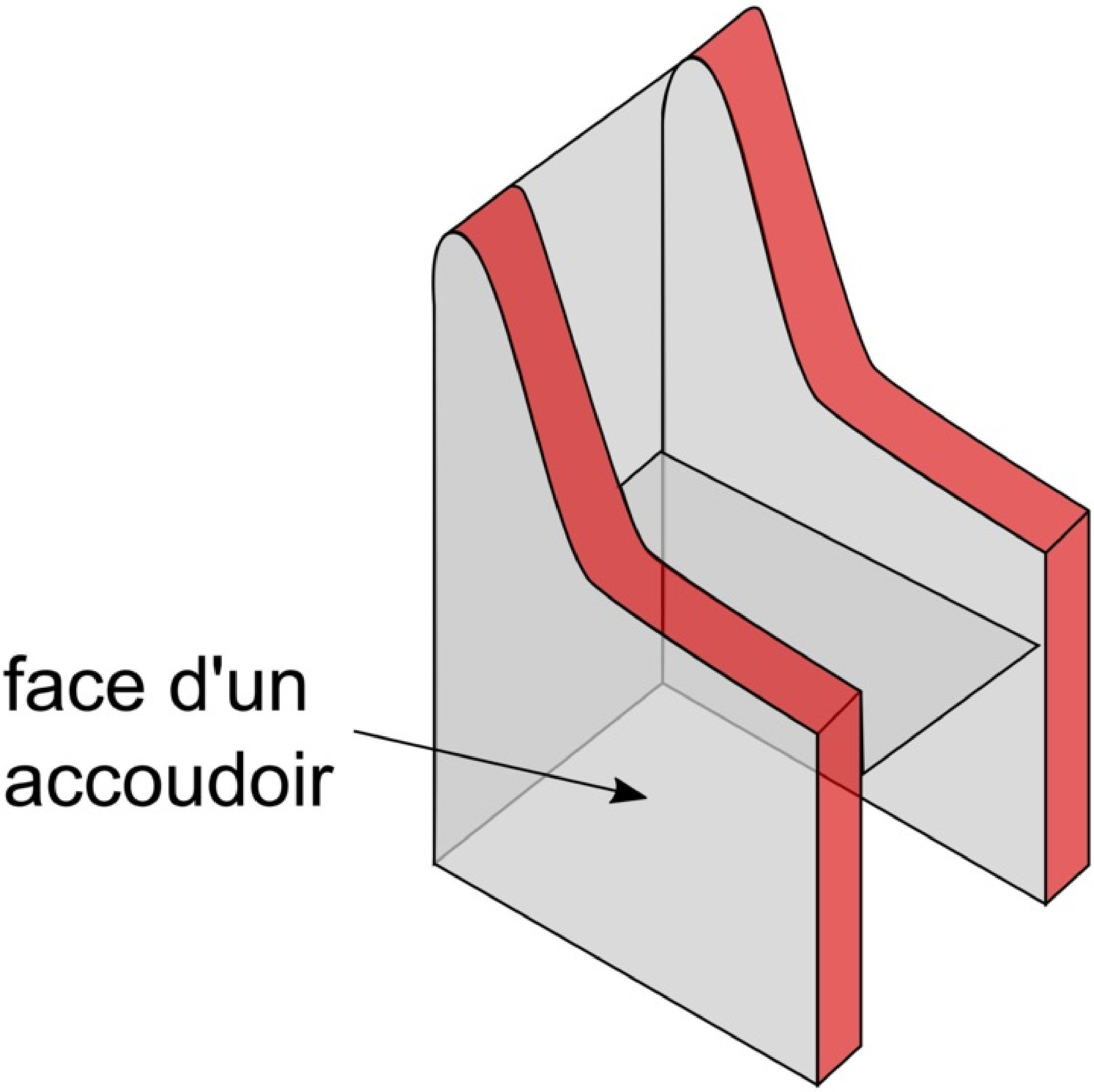
Sujet national, juin 2019, exercice 4

Énoncé

Un ébéniste décide de refaire les accoudoirs d'un fauteuil (ébauche du fauteuil en annexe 1).

Annexe 1 : ébauche du fauteuil

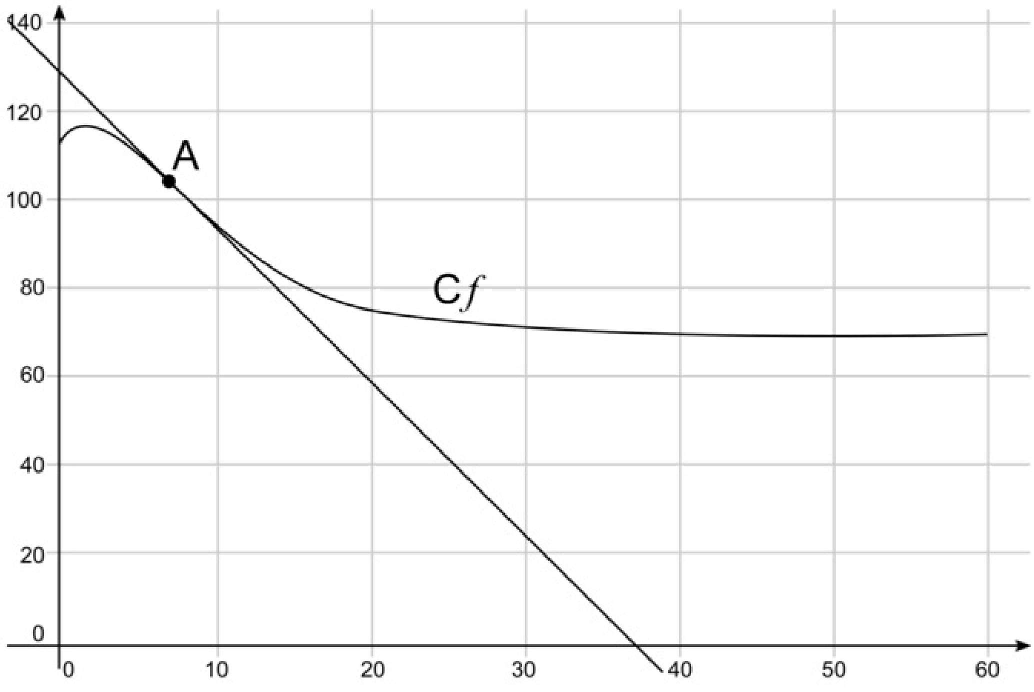


On modélise l'accoudoir à l'aide de la fonction f définie sur [0 ; 60] par :

$f(x) = 70 + (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$

La courbe représentative de f, notée C_f est donnée en annexe 2.

Annexe 2



On admet que la fonction est deux fois dérivable sur l'intervalle [0 ; 60]. On note *f'* sa fonction dérivée et *f''* sa fonction dérivée seconde.

Partie A

Dans toute cette partie, les réponses sont obtenues graphiquement à partir de la courbe représentative de f donnée en annexe 2.

Il faut être attentif au fait que la partie A doit être traitée uniquement à l'aide du graphique.

On admet que le point A de C_f d'abscisse 7 est un point d'inflexion de C_f.

1. Déterminer une valeur approchée de *f*(0) et *f*(60).

2. Déterminer *f''* (7).

D'après le cours, si le point A d'abscisse *a* est un point d'inflexion de C_f, alors *f''* (a) = 0.
Remarque : on parle de point d'inflexion pour signifier que sa tangente traverse la courbe en ce point.

3. On considère la surface située entre l'axe des abscisses, la courbe, et les droites d'équation *x* = 0 et *x* = 60.

a) Hachurer la surface décrite ci-dessus sur l'annexe 2.

b) L'ébéniste estime l'aire de cette surface à 3 800 unités d'aire. Cette estimation est-elle correcte ?

On peut également utiliser la calculatrice pour conjecturer : $\int_0^{60} f(x)dx \approx 4760$ u.a.

Partie B

1. Justifier que pour tout nombre réel *x* de l'intervalle [0 ; 60] on a :
$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)e^{-\frac{x}{5}}$.

Souvenez-vous que : $(uv)' = u'v + uv'$. La dérivée d'une constante est 0. $(e^u)' = u'e^u$.

2.
a) Étudier le signe de *f'*(*x*) sur l'intervalle [0 ; 60].

b) Dresser le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; 60]. On arrondira à l'unité près les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variations.

Souvenez-vous du théorème fondamental :
Si *f'*(*x*) > 0 sur [a ; b] alors *f* est strictement croissante sur [a ; b].
Si *f'*(*x*) < 0 sur [a ; b] alors *f* est strictement décroissante sur [a ; b].

3. Un logiciel de calcul formel permet d'afficher les lignes suivantes :

$$\text{dérivée}\left(\text{dérivée}\left(70+(14x+42)\,e^{-\frac{x}{5}}\right)\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{25}\,(14x+42)\,e^{-\frac{1}{5}x} - \frac{28}{5}\,e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$\text{factoriser}\left(\frac{1}{25}\,(14x+42)\,e^{-\frac{1}{5}x} - \frac{28}{5}\,e^{-\frac{1}{5}x}\right)$$

$$\rightarrow 14\,e^{-\frac{1}{5}x} \cdot \frac{x-7}{25}$$

En utilisant les résultats ci-avant, étudier la convexité de *f*.

4. Pour tout nombre réel *x* de l'intervalle [0 ; 60], on pose :
$g(x) = (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$
et
$G(x) = (-70x - 560)e^{-\frac{x}{5}}$.

Souvenez-vous que *f* est convexe sur un intervalle [*a* ; *b*] si $f''(x) \geq 0$ sur cet intervalle.

a) Montrer que *G* est une primitive de *g* sur l'intervalle [0 ; 60].

Souvenez-vous que pour montrer que *G* est une primitive de *g*, il suffit de montrer que pour tout $x \in [0;60]$, *G*'(*x*) = *g*(*x*).
Attention, si une fonction admet une primitive, il faut savoir qu'il existe une infinité de primitives de cette même fonction.

b) En déduire une primitive de *f* sur l'intervalle [0 ; 60].

c) Calculer la valeur exacte de $\int_{60}^{0} f(x)dx$, puis en donner une valeur approchée à l'unité d'aire près.

Souvenez-vous que $\int_{b}^{a} f(x)dx = F(b) - F(a)$ où *F* est une primitive de *f* sur l'intervalle [*a* ; *b*].

Partie C

L'ébéniste découpe 2 accoudoirs identiques sur le modèle de la surface hachurée de l'annexe 1 en choisissant comme unité le cm.
Il souhaite vernir les deux faces de chaque accoudoir (annexe 1) ainsi que le dossier du fauteuil dont l'aire est égale à 5 400 cm^2. Or il lui reste le quart d'un petit pot de vernis pouvant couvrir 10 m^2. Aura-t-il suffisamment de vernis ?