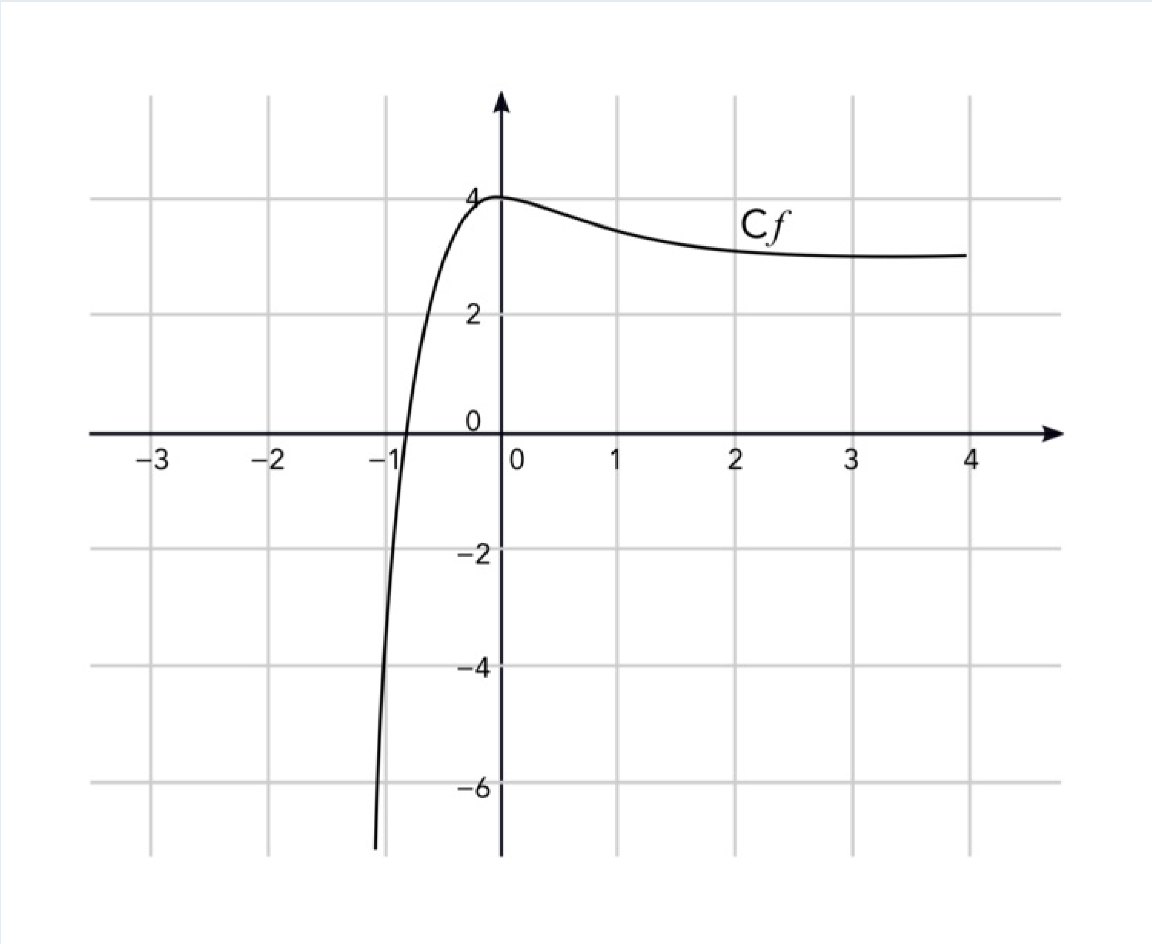
Sujet national, juin 2018, exercice 4

Énoncé

(6 points)

On désigne par la fonction définie sur l'intervalle [−2 ; 4] par



$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + 3.$

On note
C_f
la courbe représentative de *f* dans un repère. Une représentation graphique est donnée ci-dessous.

1. On note
f'
la dérivée de la fonction *f*.
Montrer que, pour tout *x*∈[−2 ; 4], $f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x}$.

Rappelez-vous que pour toutes fonctions *u* et *v* dérivables sur l'intervalle I, on a (*u* × *v*)' = *u* × *v*' + *u*'× *v* sur I.

2. Étudier les variations de *f*.

Commencez par remarquer que la fonction exponentielle est toujours positive.

3. Montrer que l'équation
$f(x) = 0$
admet une unique solution sur l'intervalle [−2 ; 0] et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.

Utilisez le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle [−2 ; 0].

4. On note
f''
la fonction dérivée de
f'
.
On admet que, pour tout *x*∈[−2 ; 4], $f''(x) = (8x-4)\mathrm{e}^{-2x}$.

a) Étudier le signe de
f''
sur l'intervalle [−2 ; 4].

b) En déduire le plus grand intervalle dans [−2 ; 4] sur lequel *f* est convexe.

Pour une fonction *f* deux fois dérivable sur un intervalle I :

- *f* est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde *f*'' est positive sur I ;
- *f* est concave sur I si et seulement si sa dérivée seconde *f*'' est négative sur I ;
- *f* admet un point d'inflexion en $x \in$ I si et seulement si *f*''(x) = 0.

5. On note g *l*a fonction définie sur l'intervalle [−2 ; 4] par $g(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.

a) Vérifier que la fonction *G* définie pour tout $x \in [-2 ; 4]$ par $G(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ est une primitive de la fonction *g*.

Il s'agit de montrer que pour tout $x \in [-2 ; 4]$, *G*'(x) = *g*(x).

b) En déduire une primitive *F* de *f*.

Déduisez la réponse de la question précédente.

6. On note *A* l'aire du domaine *D* compris entre la courbe
C_f
, l'axe des abscisses et les droites d'équation
$x = 0$
et
$x = 1$
.

a) Hachurer le domaine *D* sur le graphique donné, à rendre avec la copie.

Il s'agit de l'aire du domaine situé « sous la courbe ».

b) Par lecture graphique, donner un encadrement de *A*, en unités d'aire, par deux entiers consécutifs.

Faites attention à l'unité sur l'axe des ordonnées : 1 carreau = 2 unités.

c) Calculer la valeur exacte de *A*, puis une valeur approchée au centième.

Pensez à utiliser la fonction *F* trouvée à la question **5. b)**, et remarquez que :
$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ =
$[F(x)]_0^1$

par définition de *F*.