Énoncé

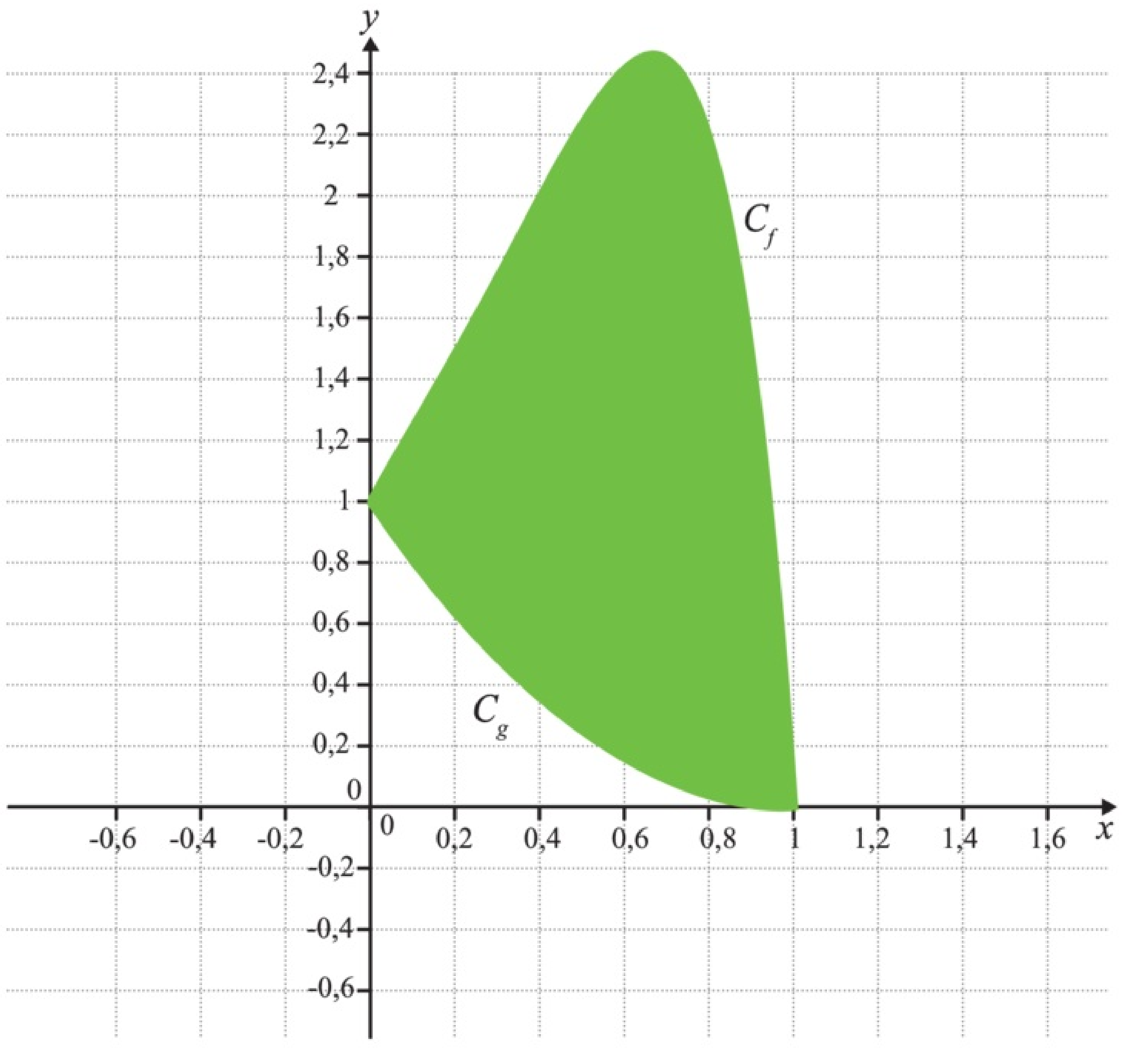
(6 points)

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions *f* et *g* définies par :
pour tout réel *x* de [0 ; 1], $f(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{3x}$ et
$g(x) = x^2 - 2x + 1$

.
Leurs courbes représentatives seront notées respectivement
C_f

et
C_g

.



Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants.
dériver((1−x)*exp(3x))
: −3x*exp(3*x)+2*exp(3*x)

factoriser(−3x*exp(3*x)+2*exp(3*x))
: exp(3x)*(−3x+2)

factoriser(dériver(exp(3x)*(−3x+2)))
: 3*exp(3*x)(1-3x)

Lecture : la dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = -3x\mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{3x}$*, ce qui, après factorisation, donne*

$f'(x) = (-3x+2)\mathrm{e}^{3x}$.

1. Étudier sur [0 ; 1] le signe de la fonction dérivée f', puis donner le tableau de variation de f sur [0 ; 1] en précisant les valeurs utiles.

Étudiez le signe de $-3x + 2$ sur l'intervalle [0 ; 1].

2. La courbe
C_f
possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

Le point I d'abscisse x est un point d'inflexion pour la courbe représentative de f (deux fois dérivable) si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en x.

Partie B

On se propose de calculer l'aire de la partie grisée sur le graphique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1) sont des points communs aux courbes
C_f
et
C_g
.

Montrez que $f(1) = g(1) = 0$ et $f(0) = g(0) = 1$.

2. On admet que : pour tout x dans [0 ; 1], $f(x) - g(x) = (1-x)(\mathrm{e}^{3x} - 1 + x)$.

a) Justifier que pour tout x dans [0 ; 1], $\mathrm{e}^{3x} - 1 \geq 0$.

Utilisez le fait que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ est croissante sur l'intervalle [0 ; 1].

b) En déduire que pour tout x dans [0 ; 1], $\mathrm{e}^{3x} - 1 + x \geq 0$.

Remarquez que $-x$ est négatif sur l'intervalle [0 ; 1].

c) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans [0 ; 1].

Étudiez le signe de chacun des facteurs de l'expression de
$f(x) - g(x)$
sur l'intervalle [0 ; 1].

3.

a) Calculer $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$.

Rappelez-vous qu'une primitive de la fonction $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sur l'intervalle [0 ; 1] est la fonction $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$.

b) On admet que : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3 - 4}{9}$.
Calculer l'aire S, en unité d'aire, de la partie grisée. Arrondir le résultat au dixième.

Remarquez qu'il s'agit de calculer $\int_0^1 (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$, puis utilisez la linéarité de l'intégrale pour effectuer le calcul.