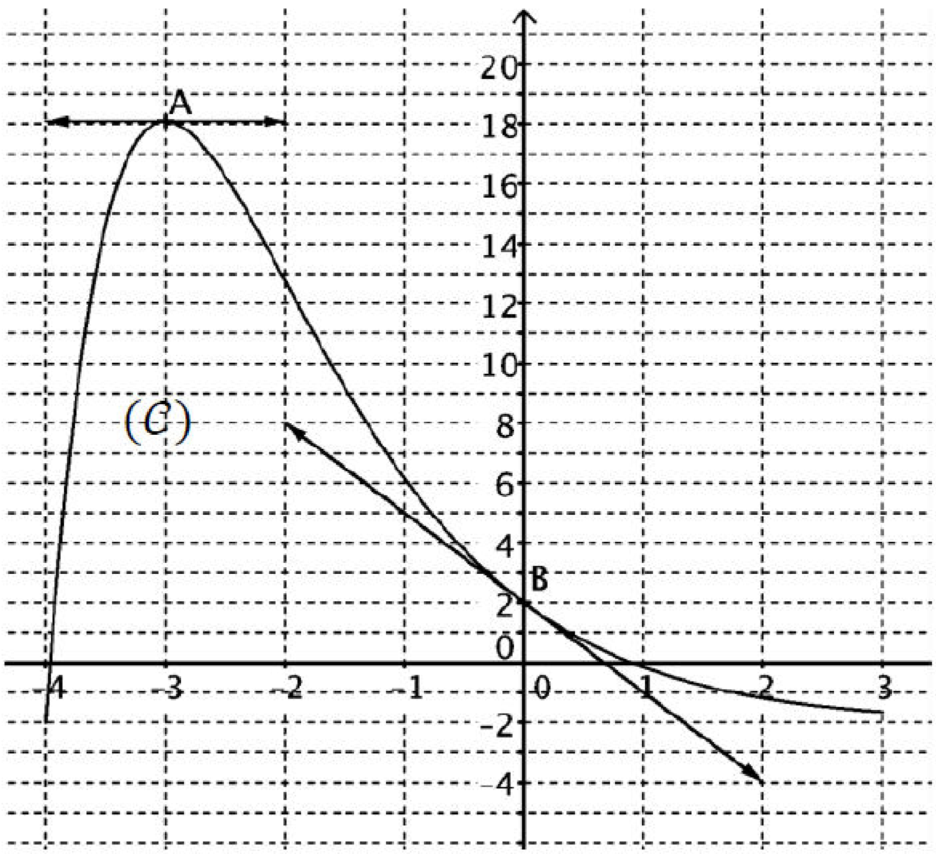
Sujet national, juin 2015, exercice 3

Énoncé

(6 points)
Les parties A et B sont indépendantes.

La courbe (C) ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [−4 ; 3]. Les points A d'abscisse −3 et B(0 ; 2) sont sur la courbe (C).
Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe (C) respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.



Partie A

1.
Par lecture graphique, déterminer :

a) $f'(-3)$;

b) $f(0)$ et $f'(0)$.

a) Que représente $f'(-3)$ par rapport à la courbe (C) ?

b) Que représente $f'(0)$ par rapport à la courbe (C) ?

2. La fonction f est définie sur [−4 ; 3] par $f(x) = a + (x + b)$𝑚𝑗{\mathrm{e}}^{-x}𝑚𝑗 où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de [−4 ; 3].

b) À l'aide des questions **1. b)** et **2. a)**, montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant : 𝑚𝑗\left \lbrace

$$a + b = 2$$
$$1 - b = -3$$

\right.

c) Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.

a) Rappelez-vous que pour toutes fonctions u et v dérivables sur un intervalle I :
$(u \times v)' = u \times v' + u' \times v$ sur l'intervalle I.

b) Calculez $f(0)$ et $f'(0)$ à l'aide de l'expression de f et de celle de f', et déduisez-en deux équations.

c) Résolvez facilement le système pour déterminer a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur [–4 ; 3] par $f(x) = -2 + (x + 4)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Justifier que, pour tout réel x de [–4 ; 3], $f'(x) = (-x - 3)\mathrm{e}^{-x}$ et en deduire le tableau de variation de f sur [–4 ; 3].

Utilisez l'expression de f' trouvée à la question **2. a)** de la **Partie A** avec les valeurs de a et b qui conviennent.

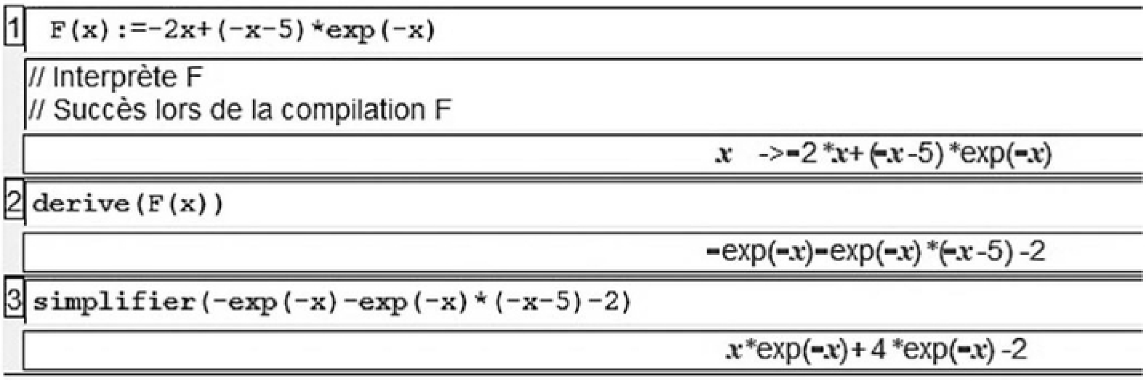
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur [3 ; 3], puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.

Utilisez le théorème des valeurs intermédiaires, puis un tableau de valeurs avec un pas de 0,1 puis de 0,01.

3.
On souhaite calculer l'aire S, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 0$.

a) Exprimer, en justifiant, cette aire à l'aide d'une intégrale.

b) Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :



```
1  F(x):=-2x+(-x-5)*exp(-x)
   // Interprète F
   // Succès lors de la compilation F
                         x ->-2*x+(-x-5)*exp(-x)
2  derive(F(x))
                         -exp(-x)-exp(-x)*(-x-5)-2
3  simplifier(-exp(-x)-exp(-x)*(-x-5)-2)
                         x*exp(-x)+4*exp(-x)-2
```

À l'aide de ces résultats, calculer la valeur exacte de l'aire S puis sa valeur arrondie au centième.

a) D'après le cours : si f est une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b], l'aire en unités d'aire de la surface délimité par la courbe
C_f
, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est I = $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$.

b) Remarquez que le logiciel de calcul formel a permis de trouver une fonction dont la dérivée est la fonction f. Cette fonction est donc une primitive de la fonction f et on peut calculer l'intégrale à l'aide de cette fonction.