

Sujet national, juin 2014, exercice 2

Énoncé

(5 points)

À l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de $1\,500\text{ m}^2$ entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50 m^2 et la remplace par du gazon.

Pour tout nombre entier naturel n , on note

u_n
la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne 2010 + n . On a donc $u_0 = 1\,500\text{ m}^2$.

1.

Calculer

u_1

.

Pour répondre à la question, commencez par calculer l'aire de la surface engazonnée restante, puis rajoutez à celle-ci l'aire de la surface de mousse remplacée par du gazon.

2.

Justifier que, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.

Généralisez le raisonnement de la question 1.

3.

On considère la suite

(v_n)

définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$v_n = u_n - 250$$

.

a)

Démontrer que la suite

(v_n)

est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

Montrez que pour tout entier naturel

n , u_{n+1} peut s'écrire sous la forme :

$$u_{n+1} = 0,8 \times v_n + 250$$

b)

Exprimer

v_n

en fonction de n .

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , $u_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n$.

Il s'agit de trouver le terme général de cette suite géométrique.

Exprimez ensuite, pour tout entier naturel n ,

u_n

en fonction

v_n

pour déterminer son expression.

c)

Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?

Il s'agit de calculer

u_4

: pensez à utiliser la formule de la question **b**).

4.

a)

Déterminer par le calcul la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que :

$$m \cdot j^{250} + 1 \sim 250 \times 0,8^n m \cdot j <$$

500

. Interpréter le résultat obtenu.

Pensez à raisonner par équivalence et à utiliser la fonction logarithme népérien.

b)

Compléter l'algorithme qui suit pour qu'il affiche la solution obtenue à la question précédente.

Initialisation

u prend la valeur $m \cdot j^{1 \setminus 500} m \cdot j$

n prend la valeur

0

Traitement

Tant que... faire

u prend la valeur...

n prend la valeur...

Fin Tant que

Sortie

Afficher n

Utilisez le résultat obtenu à la question 2.

5.

Claude est certain que les mauvaises herbes ne peuvent envahir la totalité de son terrain. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

Pour pouvoir répondre, montrez que la suite

(u_n)

est décroissante et calculez sa limite.