

## Énoncé

(5 points)

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.

Pour l'ouverture prévue le 1<sup>er</sup> janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

### Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.

On appelle

$u_n$   
le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1<sup>er</sup> janvier de l'année (2013 +  $n$ ).

On donne

$$u_0 = 42$$

.

1. Justifiez que, pour tout entier naturel

$n$ , on a  $u_{n+1} = u_n \times 0,95 + 6$ .

Quel coefficient multiplicateur est associé à une baisse de 5 % ?

2. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.

Expliquez ce que permet de calculer cet algorithme.

**Variables :**

$U$

,

$N$

**Initialisation :**

Mettre 42 dans

$U$

Mettre 0 dans

$N$

**Traitement :**

Tant que

$U$

$< 100$

$U$

prend la valeur

$U$

$\times 0,95 + 6$

$N$

prend la valeur

$N$

$+ 1$

Fin du Tant que

**Sortie :**

Afficher

$N$

3. Avec votre calculatrice, déterminez le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

Vous devez trouver une valeur qui est comprise entre

25

et

30

.

Observez ce que calcule la variable

$U$

et remarquez que l'algorithme retourne une valeur

$N$

.

## Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.

On appelle

$v_n$

le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1<sup>er</sup> janvier de l'année (2013 +

$n$

).

1. Identifiez et écrivez la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.

Remarquez que seul un chiffre est à changer dans l'algorithme.

2. On admet que  $m_j v_{n+1} = v_n + 0,95 m_j$  avec

$$v_0 = 42$$

.

On considère la suite (

$w_n$

) définie, pour tout entier

$n$

, par  $m_j w_n = v_n - 80 m_j$ .

Montrez que (

$w_n$

) est une suite géométrique de raison

$$q = 0,95$$

et précisez son premier terme

$w_0$

.

Montrez que pour tout entier naturel

$n$

,  $m_j w_{n+1} m_j$  peut s'écrire sous la forme  $m_j w_{n+1} = q \times w_n m_j$  avec

$q$

une constante.

3.

On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n = -38 \times (0,95)^n m_j$ .

a) Déterminez la limite de

$(w_n)$

.

Pour déterminer la limite, remarquez que

0

<

0,95

<

1

.

b) Déduisez en la limite de

$(v_n)$

.

Déduisez le résultat du résultat de la question 3. a).

c) Interprétez ce résultat.

Souvenez-vous ce que représentent les termes de la suite

$(v_n)$

et n'oubliez pas qu'ils sont exprimés en milliers.

