Inde, avril 2013, exercice 4

Énoncé

(6 points)

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ par $f(x) = 1 - (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrez que $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

Faites attention car il y a un produit dans l'expression de f et rappelez-vous que pour toute fonction u dérivable sur un intervalle J, $(\mathrm{e}^u)' = u\mathrm{e}^u$ sur J.

2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$.
Puis, déterminez une valeur arrondie de α à $0,01$.

Utilisez le théorème des valeurs intermédiaires.

3. On admet que la fonction F définie sur $[0\ ;\ 6]$ par $F(x) = x + (x+2)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $[0\ ;\ 6]$. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} de $I = \int_0^6 f(x)\mathrm{d}x$.

F étant une primitive de la fonction f sur $[0\ ;\ 6]$, remarquez que l'on a $I = \int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_0^6$.

Partie B

Une entreprise lance la production de batteries pour véhicules électriques.
Une étude a modélisé le rythme de la production journalière sur les six premiers mois à l'aide de la fonction f définie dans la partie **A** pour x compris entre 0 et 6.
x représente le nombre de mois (de 30 jours) depuis le lancement du produit.
$f(x)$ représente la production journalière de batteries en milliers.

1. Exprimez en mois puis en jours le moment où la production atteindra 0,5 millier soit 500 unités.

Utilisez la question **2.** de la partie A.

2. Déterminez une valeur arrondie à 10^{-3} de la valeur moyenne, exprimée en milliers, de la production sur les six premiers mois.

Utilisez la question **3.** de la partie A.

Partie C

Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries, sous certaines conditions de conduite, soit de 200 km.
Sur un parcours joignant une ville située à 160 km, on suppose que l'autonomie, exprimée en kilomètre, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance μ = 200 et d'écart type σ = 40.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de ne pas atteindre cette ville ?

Déterminez la probabilité cherchée et utilisez les formules suivantes : pour tout nombre réel $x \leq \mu$, $P(X \leq x) = 0,5 - P(x \leq X \leq \mu)$; $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$ au centième près.

2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à 0,01 ? Justifiez votre réponse.

Déterminez la probabilité cherchée et utilisez les formules suivantes : pour tout nombre réel $x \leq \mu$, $P(X \leq x) = 0,5 + P(\mu \leq X \leq x)$; $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$ $\approx 0,997$ à 10^{-3} près.