Sujet national, juin 2011, exercice 4

Énoncé

Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé en vendant *x* centaines d'objets fabriqués, est modélisé par la fonction *B* définie et dérivable sur l'intervalle [0,1 ; 10] par :
$B(x) = 10 \times \frac{1+\ln x}{x}$.
Si *B*(*x*) est positif, il s'agit d'un bénéfice ; s'il est négatif, il s'agit d'une perte.

1
Coraline utilise un logiciel de calcul formel. À plusieurs reprises, elle entre une commande, et le logiciel renvoie une réponse. Elle obtient l'écran suivant :

(Commande) B(x) :=10*((1+ln(x))/x)

(Réponse 1) $x -> 10 * \left(\frac{1+\ln x}{x}\right)$

(Commande) deriver(B(x),x)

(Réponse 2) $\frac{10}{x^2} + \frac{10*(1+\ln(x))*(-1)}{x^2}$

(Commande) resoudre(B(x)=0,x)

(Réponse 3) $[\exp(-1)]$

(Commande) resoudre(B(x)>0,x)

(Réponse 4) $[x > \exp(-1)]$

(Commande) maximum(B(x),[0.1 ;10])

(Réponse 5) 10

a) Traduire sur le graphique donné en annexe, illustrant la courbe représentative de la fonction *B*, les réponses 3, 4 et 5 renvoyées par le logiciel de calcul formel.

b) Justifier la réponse 3 renvoyée par le logiciel de calcul formel. Interpréter cette valeur en terme de résultat mensuel pour l'entreprise.

2
a) Démontrer qu'une primitive de la fonction *B* sur l'intervalle [0,1 ; 10] est la fonction *F* définie sur [0,1 ; 10] par :
$F(x) = 5\ln x(\ln x + 2)$.

b) Calculer $\int_{0,5}^{1,5} B(x)\,\mathrm{d}x$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
Ce nombre représente le bénéfice mensuel moyen en milliers d'euros lorsque l'entreprise produit et vend chaque mois un nombre d'objets compris entre 50 et 150.

3 Pour quel nombre d'objets le bénéfice mensuel *B* est-il maximal ? Justifier la réponse par un calcul.

Annexe