Fiche

Pour résoudre une équation ou une inéquation du premier degré à une inconnue, on isole le terme inconnu dans un membre. De nouveaux types d'équations et inéquations apparaissent, comportant l'inconnue au carré ou au dénominateur. On s'intéresse également à la résolution conjointe de deux équations (ou de deux inéquations). Cette situation se retrouve par exemple lorsque l'on cherche à déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites.

1. Quelles sont les méthodes pour résoudre une équation ou une inéquation comportant des carrés ?

• Pour résoudre une **équation comportant des carrés**, on revient à une écriture de la forme $X^2 = A^2$. Deux nombres opposés ont le même carré, donc : $X^2 = A^2$ équivaut à $X = A$ ou $X = -A$.

Exemple

Résoudre $(x-1)^2 = 9$

revient à écrire : $x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$,
soit $x = 4$ ou $x = -2$, d'où $S = \{-2 ; 4\}$.

• Pour résoudre une **inéquation comportant des carrés**, on transpose tous les termes dans un seul membre et on factorise, si possible, en un produit de facteurs du premier degré.
On peut alors en déduire l'ensemble des solutions à l'aide d'un tableau de signes.

Exemple

Résoudre $(x - 1)^2 \leq 9$ revient à écrire : $(x - 1)^2 - 9 \leq 0$.
On reconnaît alors la différence de deux carrés : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
D'où : $[(x - 1) - 3][(x - 1) + 3] \leq 0$, ou encore : $(x - 4)(x + 2) \leq 0$.
On conclut à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-4)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit est négatif sur l'intervalle $[-2 ; 4]$, d'où : $S = [-2 ; 4]$.

Exercice n°1

2. Quelles sont les méthodes pour résoudre une équation ou une inéquation comportant l'inconnue au dénominateur ?

• Dans le cas d'une **équation**, on écrit l'égalité des « produits en croix » pour obtenir une égalité sans dénominateur.

Exemple

Pour $x \neq 0$, résoudre l'équation $\frac{x-1}{x} = \frac{2}{3}$ équivaut à résoudre :
$\mathbf{3(x-1) = 2x}$

.

D'où :
$\mathbf{3x - 3 = 2x}$
, ou encore
$\mathbf{3x - 2x = 3}$
, soit $x = 3$.
L'ensemble des solutions es $S = \{3\}$.

• Dans le cas d'une **inéquation**, on transpose tous les termes dans un seul membre et on fait apparaître si possible un quotient de facteurs du premier degré. On peut alors déterminer l'ensemble des solutions à l'aide d'un tableau de signes.

Exemple

Pour $x \neq 0$, résoudre l'équation $\frac{x-1}{x} \leq \frac{2}{3}$ équivaut à résoudre $\frac{x-1}{x} - \frac{2}{3} \leq 0$.
En réduisant au même dénominateur, on obtient : $\frac{3x-3}{3x} - \frac{2x}{3x} \leq 0$, soit $\frac{x-3}{3x} \leq 0$.
On conclut à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{x-3}{3x}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Le quotient est négatif sur l'intervalle]0 ; 3], donc $S =]0;3]$.

Exercice n°2

Exercice n°3

3. Comment résoudre un système d'équations du premier degré à deux inconnues ?

Il y a deux méthodes : par substitution ou par addition.

• Si l'une des inconnues possède un coefficient égal à 1 ou –1, il est préférable d'utiliser la **méthode par substitution**.
Dans l'une des équations, on écrit l'inconnue dont le coefficient est 1 ou –1 en fonction de l'autre, puis on substitue cette écriture à l'inconnue de la seconde équation.

Exemple

Dans le système $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$, on exprime x en fonction de y dans la première équation et on obtient le système équivalent :
$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$.
On remplace ensuite x par
$\mathbf{3 - 2y}$
dans la seconde équation, ce qui donne le système :
$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2(3 - 2y) + 3y = 4 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x = 3 - 2y \\ -y + 6 = 4 \end{cases}$, soit encore à $\begin{cases} x = 3 - 4 = -1 \\ y = 6 - 4 = 2 \end{cases}$.
On obtient ainsi le couple solution : $S = \{(-1\ ;\ 2)\}$.

• Si les coefficients des inconnues sont différents de 1 ou de –1, pour éviter l'apparition d'écritures fractionnaires, on utilise la **méthode**

par addition.
Cette méthode consiste à faire apparaître des coefficients opposés pour l'une des inconnues, en multipliant les équations par des réels bien choisis. En additionnant membre à membre les deux équations transformées, on obtient une équation à une seule inconnue que l'on peut résoudre. On utilise alors ce résultat pour résoudre l'autre équation.

Exemple

Dans le système $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$, on multiplie les termes de la première équation par 2 et ceux de la seconde par 3 et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 9x-6y=12 \end{cases}$.
On additionne membre à membre les deux équations et on remplace la seconde équation du système par le résultat ; on obtient le système équivalent : $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 13x=26 \end{cases}$, soit encore $\begin{cases} 8+6y=14 \\ x=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=(14-8)\div 6=1 \\ x=2 \end{cases}$.
On en déduit le couple solution : $S=\{(2\,;\ 1)\}$.

• Un système peut n'avoir aucune solution ou encore une infinité de solutions.
Soit le système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$. Si les coefficients de x et de y sont proportionnels, c'est-à-dire si
$\boldsymbol{ab'=a'b}$
, ce système a une infinité de solutions ou pas de solution du tout :
- si $ac' \neq a'c$, alors le sysème n'a pas de solution ;
- si
$\boldsymbol{ac'=a'c}$
(les coefficients des deux équations sont proportionnels), alors le système a une infinité de solutions.

Exercice n°4

• On trouvera dans la fiche « Lire ou compléter un algorithme », un algorithme permettant de résoudre tout système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

4. Comment résoudre un système d'inéquations du premier degré à une inconnue ?

Pour résoudre un système de deux inéquations du premier degré à une inconnue, on résout chacune des inéquations, on obtient ainsi deux intervalles de solutions. On cherche ensuite la **partie commune aux deux intervalles** ; si elle existe, c'est la solution du système.

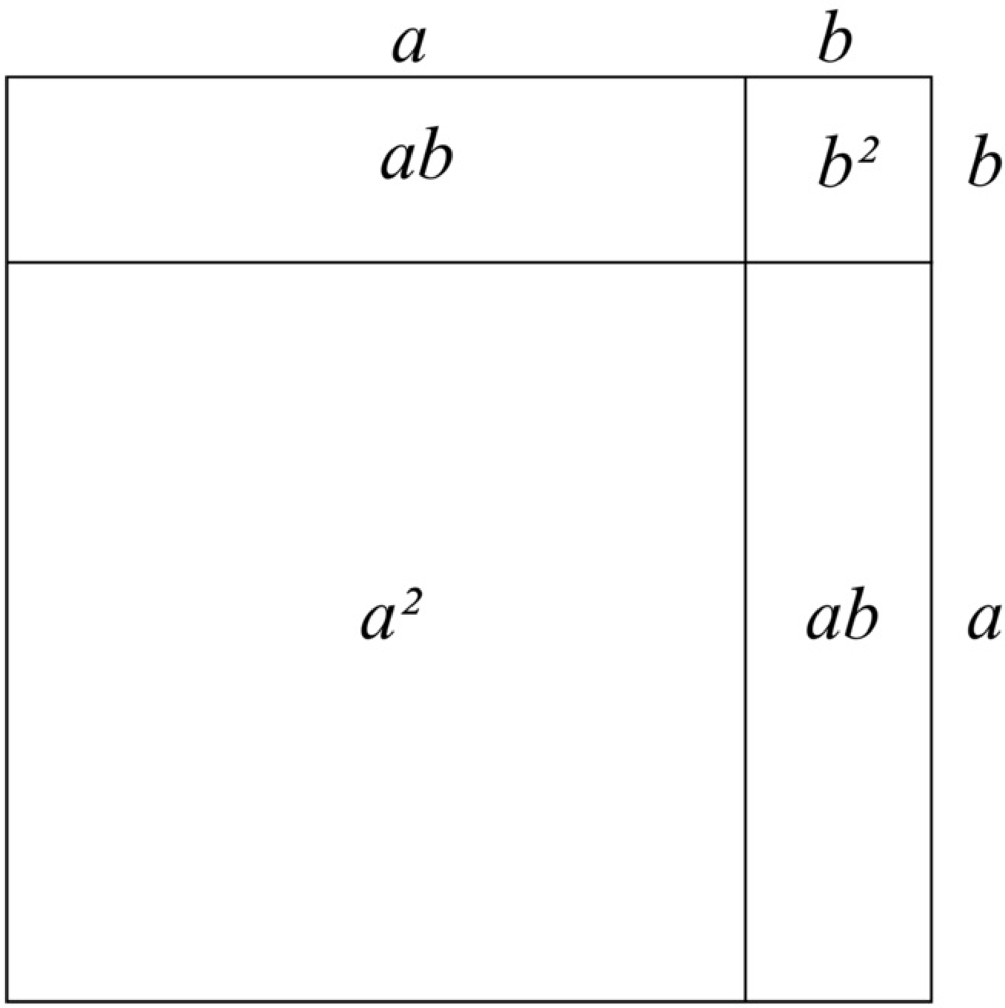
Exemple

On veut résoudre le système : $\begin{cases} 2x<3 \\ x+4>0 \end{cases}$.
Ce système est équivalent à : $\begin{cases} x<1,5 \\ x>-4 \end{cases}$.
L'ensemble des solutions du système est donc l'intersection de deux intervalles :
$S=]-\infty\,;\ 1,5[\,\cap\,]-4\,;\ +\infty[$. D'où : $S=]-4\,;\ 1,5[$. (Il peut être utile de dessiner les intervalles pour déterminer l'intersection.)

Exercice n°5

5. Démonstrations

Démonstration 1 : Pour tout réels positifs a et b, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
Pour tout réels positifs a et b :
d'une part : $(\sqrt{ab})^2=ab$.
d'autre part :



$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) = \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} = ab$.
On a donc $(\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$ et $\sqrt{ab} \geq 0$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \geq 0$.
Ainsi, pour tout réels positifs a et, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
Démonstration 2 : Pour tout réels strictement positifs a et b, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
Pour tout réels strictement positifs a et b :
d'une part : $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$.
d'autre part : $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$
On a donc $(\sqrt{a+b})^2 > (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ car $2\sqrt{ab} > 0$
On a donc $(\sqrt{a+b})^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ et $\sqrt{a+b} > 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.
Donc $\sqrt{(\sqrt{a+b})^2} < \sqrt{(\sqrt{a+b})^2}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$.
Ainsi $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
<u>Démonstration 3 :</u> Pour tout réels et positifs, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
On considère un grand carré de côté longueur $a + b$.
On peut construire à l'intérieur de ce carré deux rectangles d'aire ab ainsi que un carré d'aire a^2 et un carré d'aire b^2.
D'une part le grand carré a pour aire $(a + b)^2$.
D'autre part le grand carré a pour aire $ab + b^2 + a^2 + ab$ soit $a^2 + 2ab + b^2$.
L'aire d'un carré étant unique on a donc $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

<u>Algorithme :</u> Soit a et c deux réels strictement positifs. Déterminer le plus petit entier b tel que $a^b \leq c$.

```
a=float(input("a="))
c=float(input("c="))
b=1
while a**b<=c:
    b=b+1
print("Ainsi on a",a,"^",b,"<=",c)
```

© 2000-2023, rue des écoles