

Fiche

Par une lettre du 29 juillet 1654, Pascal répond à Fermat sur le problème des « parties » (Pascal, *Œuvres complètes*, Gallimard, « La Pléiade », p. 77). On peut dater de ce jour la naissance des probabilités. Cette branche des mathématiques prendra son plein essor avec les Bernoulli, puis avec Poisson, jusqu'à fournir, au  $xx^e$  siècle, la base théorique nécessaire à la conception des lois de toutes les sciences, de la physique à la sociologie.

1. Comment définir une probabilité ?

- On part d'une **expérience aléatoire**  $E$ , c'est-à-dire d'une expérience dont on peut prévoir les issues possibles, mais dont on ne connaît le résultat qu'après sa réalisation.

- Première étape : à l'aide d'un arbre, par exemple, on détermine toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire. On définit ainsi l'**univers**  $\Omega$  comme l'**ensemble de toutes les issues possibles de  $E$** . On a :  $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

- Seconde étape : à **chaque issue on attribue une probabilité**, c'est-à-dire qu'à chaque  $e_i$  on associe un nombre  $p_i$

Ces nombres doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 0 \leq p_i \leq 1, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\} \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \end{cases}$$

Pour déterminer les nombres

, il existe deux possibilités :

- soit on associe à toutes les issues la même probabilité  $p_i = \frac{1}{n}$ , on dit alors que la probabilité est **équirépartie** ou que l'on est dans une situation d' **équiprobabilité** ;
- soit on répète l'expérience dans des conditions identiques, on définit alors  $p_i$  comme la fréquence de  $x_i$  quand le nombre de répétitions tend vers  $+\infty$ .

- À l'issue de ces deux étapes, on a établi la **loi de probabilité** que l'on présente sous forme de tableau :

Issue	$e_1$	$e_2$	...	$e_n$	
Probabilité	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$	1

Remarque

La première étape est essentielle. Il s'agit d'abord de bien comprendre l'expérience, de la visualiser et de la simuler pour écrire quelques issues possibles. Il s'agit enfin de déterminer toutes les issues de l'expérience. C'est dans ce « toutes » que réside la difficulté.

 [Exercice n°1](#)

 [Exercice n°2](#)

 [Exercice n°3](#)

2. Comment calculer la probabilité d'un événement ?

Soit  $E$  une expérience aléatoire et  $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , l'univers associé à  $E$ .

- On appelle **événement** de l'expérience aléatoire  $E$ , tout sous-ensemble de  $\Omega$ . Autrement dit, un **événement**  $A$  est une partie de  $\Omega$ .

Quand  $x_i$  appartient à  $A$ , on dit aussi que  $x_i$  **réalise**  $A$ .

On appelle **événement élémentaire**, un événement constitué d'un seul élément de  $\Omega$ , c'est-à-dire constitué d'une seule issue  $\{e_i\}$ .

- La **probabilité**  $P(A)$  d'un événement  $A$  est la **somme des probabilités des issues** qui le constituent.

Dans le cas où la probabilité est équirépartie, chaque issue  $e_i$

a pour probabilité  $\frac{1}{n}$ .

Ainsi, si  $A$  contient  $m$  éléments,  $P(A) = m \times \frac{1}{n}$ .

Autrement dit :  $P(A)$  est égal au rapport du nombre d'éléments de  $A$  par le nombre d'éléments de  $\Omega$ .

## Remarques

- La probabilité d'un événement élémentaire  $\{e_i\}$  est  $p_i$

.

- $\Omega$  est appelé **événement certain** ;  $P(\Omega) = 1$ .

- Le sous-ensemble vide, noté

$\emptyset$

- , est appelé **événement impossible** ;

$P(\emptyset) = 0$

.

 [Exercice n°4](#)

 [Exercice n°5](#)

 [Exercice n°6](#)

### 3. Comment calculer la probabilité de l'union de deux événements ?

- Soit  $A$  et  $B$  deux événements d'une même expérience aléatoire.

$A \cup B$  est l'événement constitué des issues qui appartiennent à  $A$  **ou** à  $B$ .

$A \cap B$  est l'événement constitué des issues qui appartiennent **à la fois** à  $A$  et à  $B$ .

Quand

$A \cap B = \emptyset$

, c'est-à-dire quand aucune issue n'appartient à la fois à  $A$  et à  $B$ , on dit que  $A$  et  $B$  sont **incompatibles** (ou disjoints).

- Si  $A$  et  $B$  sont quelconques :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

Si  $A$  et  $B$  sont incompatibles (ou disjoints) :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

 [Exercice n°7](#)

 [Exercice n°8](#)

### 4. Comment calculer la probabilité d'un événement contraire ?

L'**événement contraire** de  $A$ , noté  $\bar{A}$ , est l'événement qui se réalise **quand  $A$  n'est pas réalisé**. Il est constitué des issues de  $\Omega$  qui n'appartiennent pas à  $A$ .

Cela se résume ainsi :

$A \cap \bar{A} = \emptyset$

et  $A \cup \bar{A} = \Omega$ .

- En utilisant les propriétés du paragraphe précédent, on montre que, pour tout événement  $A$  :  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

 [Exercice n°9](#)

 [Exercice n°10](#)

## À retenir

- Définir une probabilité, c'est associer à chaque issue

$x_i$

un nombre

$p_i$

positif de telle sorte que

$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

.

- La probabilité  $P(A)$  d'un événement  $A$  est la somme des probabilités des issues qui le constituent.

- Dans le cas équiprobable :  $P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$ .

- Soit  $A$  et  $B$  deux événements quelconques :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

- Soit  $A$  un événement quelconque :  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

