Fiche

Parmi l'ensemble des fonctions étudiées, les fonctions sinus et cosinus présentent des particularités spécifiques, notamment la périodicité. L'étude de ces fonctions sur la période (un intervalle) va permettre d'obtenir la représentation graphique de toute la fonction. On pourra revoir graphiquement les propriétés du sinus et du cosinus d'un angle étudiées en classe de Seconde et de Première.

1. Définition, dérivation

La fonction *cosinus*, notée *cos*, est la fonction qui à tout réel x associe le nombre réel $\cos x$.
La fonction *sinus*, notée *sin*, est la fonction qui à tout réel x associe le nombre réel $\sin x$.
Propriétés : les fonctions *sinus* et *cosinus* sont dérivables sur l'ensemble des réels.
Pour tout réel x : $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\cos'(ax+b) = -a\sin(ax+b)$.
Pour tout réel x : $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\sin'(ax+b) = a\cos(ax+b)$.

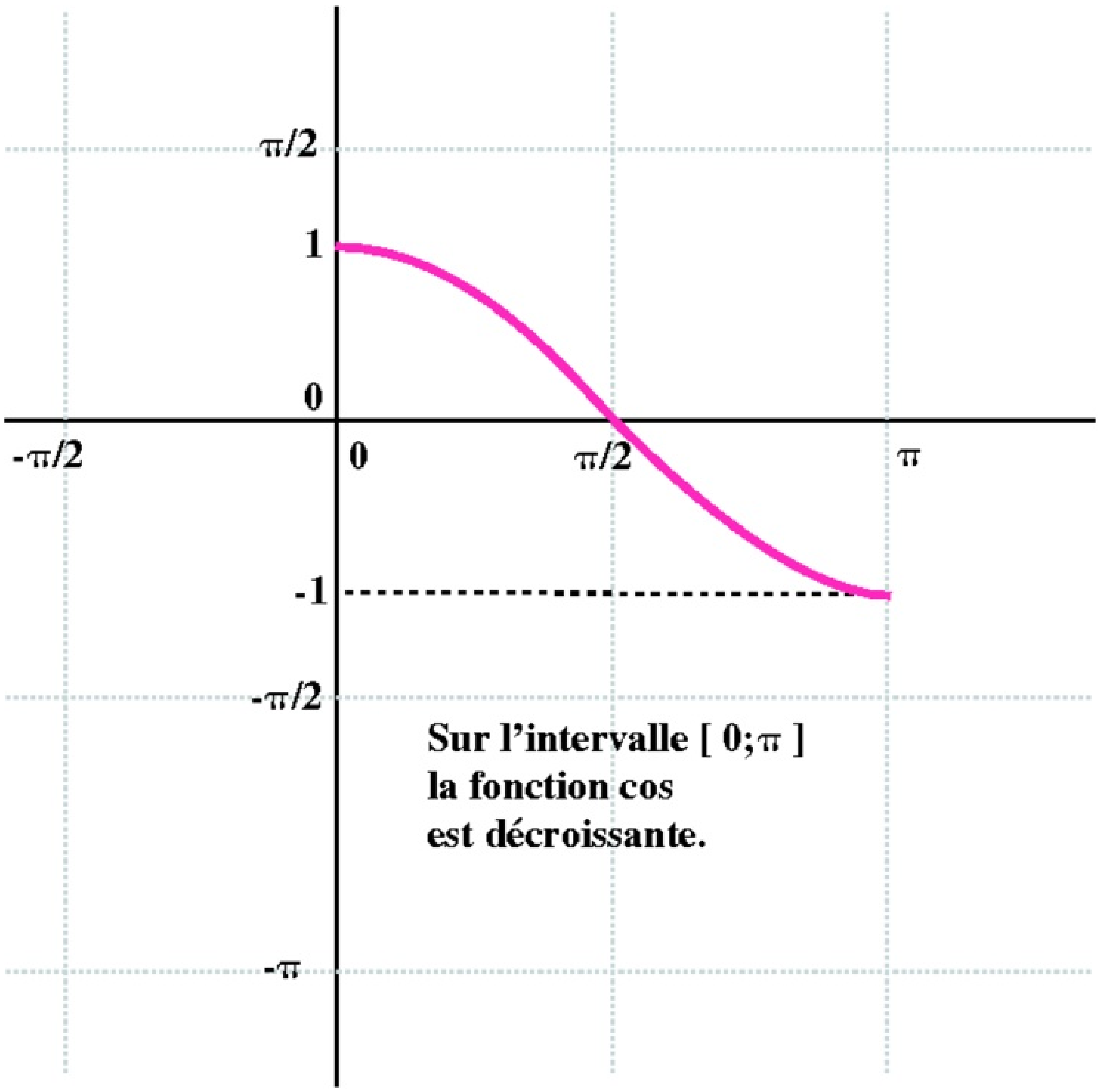
Exercice n°1

Exercice n°2

Exercice n°3

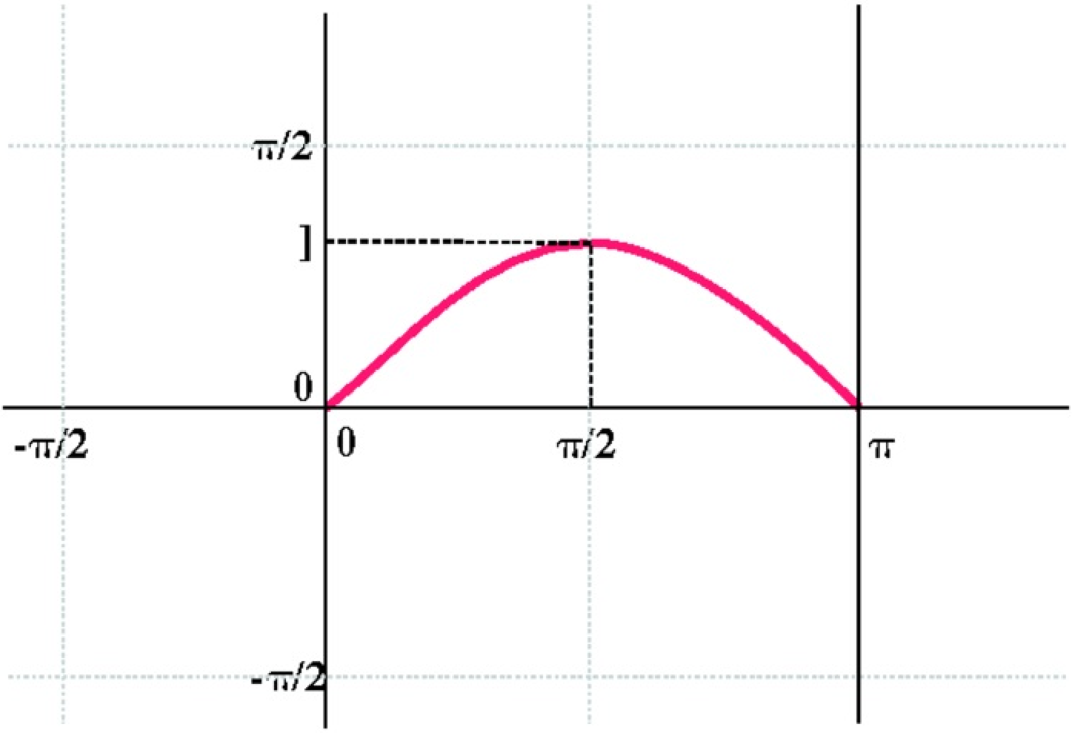
2. Fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle [0 ; π]

La fonction cosinus



La fonction sinus

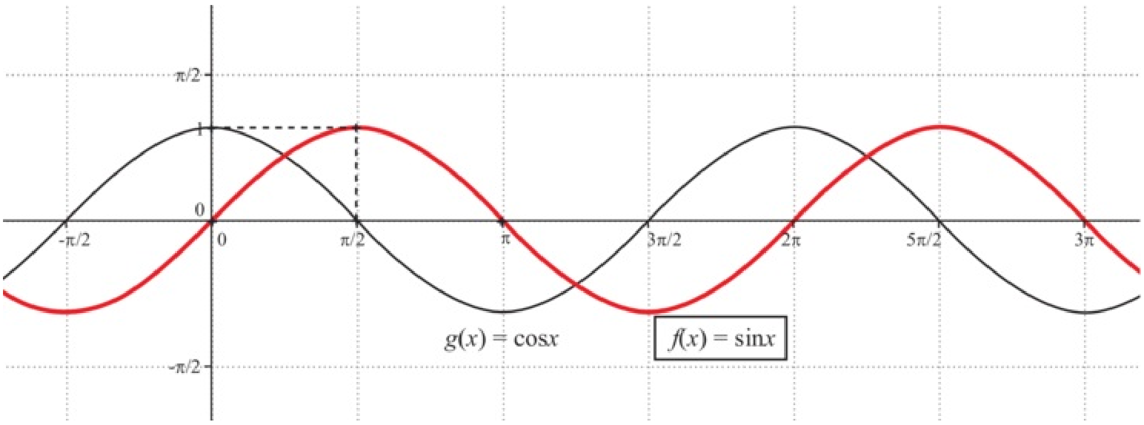
Sur l'intervalle [$0;\frac{\pi}{2}$] la fonction sin est croissante.



Sur l'intervalle [$\frac{\pi}{2}$;π] la fonction sin est décroissante.

3. Parité, périodicité des courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus

Pour tout réel x, on a $cos(-x) = cos\ x$ donc la fonction *cosinus* est paire.
Pour tout réel x, on a $sin(-x) = -sin\ x$ donc la fonction *sinus* est impaire.
Pour tout réel x, on a $cos(x + 2\pi) = cosx$ et $sin(x + 2\pi) = sinx$.
Donc les fonctions *sinus* et *cosinus* sont périodiques de période 2π.



Exercice n°4

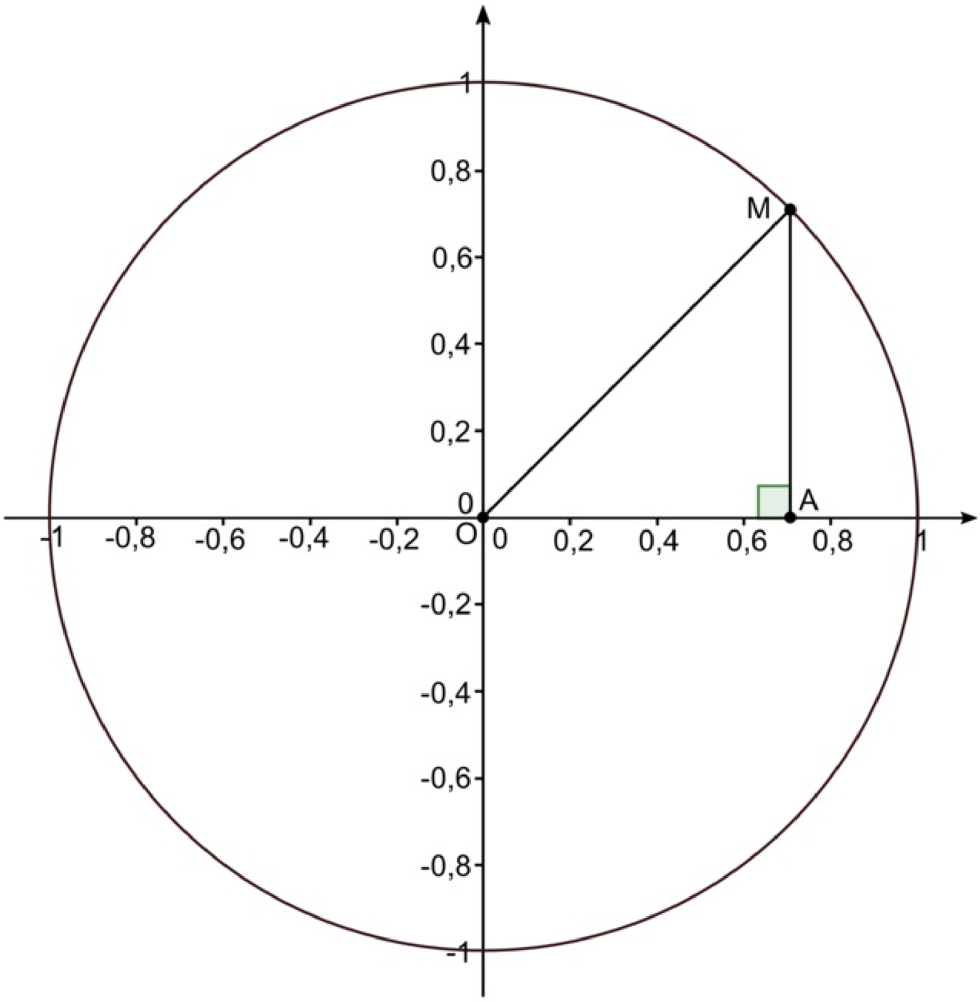
Exercice n°5

4. Valeurs remarquables :

Angle α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	1
cos (α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin (α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Démonstration : $sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On place le point M sur le cercle trigonométrique tel que M représente le réel $\frac{\pi}{4}$. Alors une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$ est $\frac{\pi}{4}$. Soit A le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. OAM est donc rectangle iscocèle en A. On a d'après le théorème de Pythagore :
$OM^2 = OA^2 + AM^2$
Or OA = AM et OM = 1 donc :
$1^2 = 2 \times OA^2$
Ainsi $OA = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2 \times \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Exercice n°6

Exercice n°7

À retenir

- $cos'(ax+b) = -a\ sin(ax+b)$ et $sin'(ax+b) = a\ cos(ax+b)$.
- Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont périodiques de période 2π.