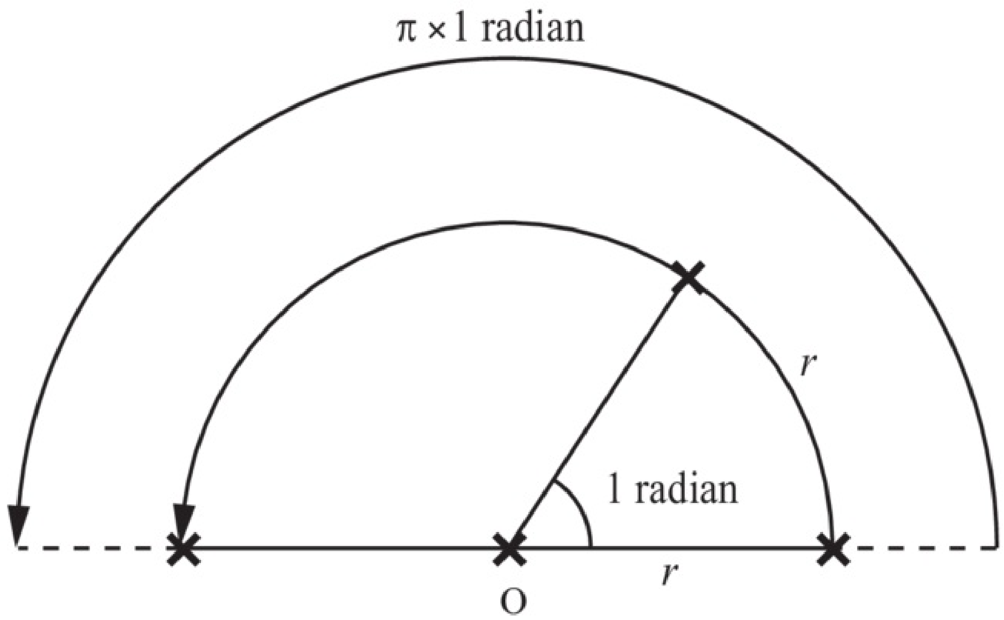
# Trigonométrie

## Fiche

**Dans un triangle, les angles géométriques sont saillants. Leur mesure varie de 0 à 180°. Pour un cercle, les angles au centre rentrants peuvent mesurer jusqu'à 360°.**
**Les angles orientés ont des mesures réelles, éventuellement négatives ou supérieures à 360°. Au degré, on préfère alors le radian.**
**Le sinus et le cosinus d'un angle orienté se définissent à partir du cercle trigonométrique, centré sur l'origine d'un repère orthonormal, de rayon 1 et parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.**

### 1. Quel est l'intérêt d'une mesure d'angle en radian ?

**Définition** : Le *radian* est la mesure d'un angle au centre qui découpe, sur le cercle, un arc dont la longueur est égale au *rayon*.




**Conversion** : Le périmètre d'un cercle de rayon $r$ est égal à $2\pi\ r$. Donc $2\pi$ radians équivalent à 360°. Soit 1 radian = $\frac{360°}{2\pi}$ ou 1 radian ≈ 57,30°.
On retiendra : $\pi$ radians = 180°, ou plus simplement $\pi$ = 180°.
**Mesure d'un arc** : La mesure d'un arc est la mesure de l'angle au centre qui intercepte cet arc.
**Longueur d'un arc** : Un angle de $\alpha$ radians intercepte un arc de longueur l = r × $\alpha$.
Une mesure en degrés nécessiterait le calcul préalable du périmètre du cercle et aboutirait à une formule plus compliquée :
$l = 2\pi r \times \frac{\alpha}{360} = \frac{\pi r \alpha}{180}$

Exercice n°1

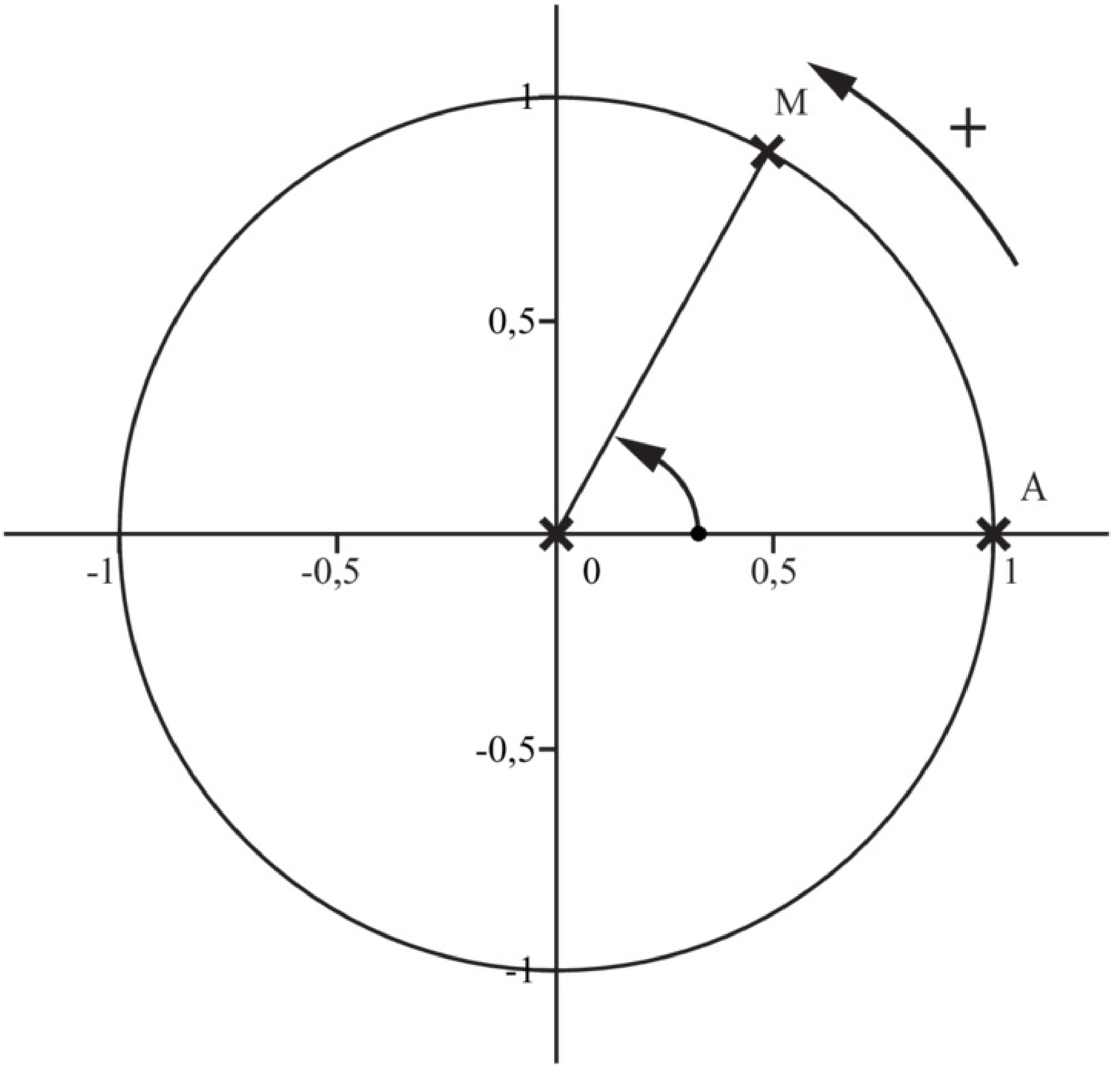
Exercice n°2

### 2. Qu'est-ce qu'un angle orienté ?

**Orientation du plan** : Le plan est orienté dans le sens positif lorsque tous les cercles de ce plan sont parcourus dans le sens positif, c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une montre.
**Cercle trigonométrique** : Dans un repère orthonormé, c'est le cercle
- de rayon 1,
- centré sur l'origine,
- parcouru dans le sens positif.

**Définition** : Si A et M sont deux points d'un cercle trigonométrique de centre O, l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ est l'angle orienté $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM})$.
Un repère orthonormé (O ; I ; J) est direct lorsque $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2}$.
**Mesure d'un angle orienté** : Si $\alpha$ est la mesure d'un angle orienté alors tout autre mesure de la forme $y = \alpha + 2k\pi (k \in Z)$

convient. Plus directement on note $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = \alpha[2\pi]$ (la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ est égale à α à $2\pi$ près).




Exercice n°3

Exercice n°4

## 3. Comment déterminer la mesure principale d'un angle orienté ?

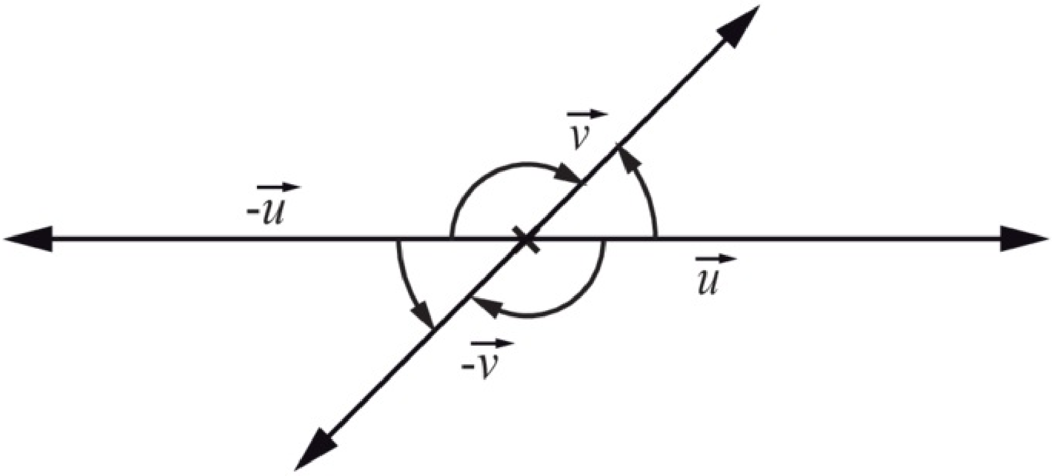
**Définition** : Un angle orienté possède une infinité de mesures. En ajoutant ou en retranchant $2\pi$ à une mesure donnée on obtient une autre mesure possible.
La mesure principale α vérifie $-\pi < \alpha \leq \pi$.
**Méthode** : On décompose la mesure donnée pour faire apparaître une somme dont l'un des termes est multiple de $2\pi$.
**Exemple** : Pour un angle mesurant $\frac{27\pi}{4}$ radians on écrit :
$\frac{27\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4} = 3 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$.
Comme $-\pi < \frac{3\pi}{4} \leq \pi$, c'est la mesure principale de l'angle de $\frac{27\pi}{4}$ radians.

Exercice n°5

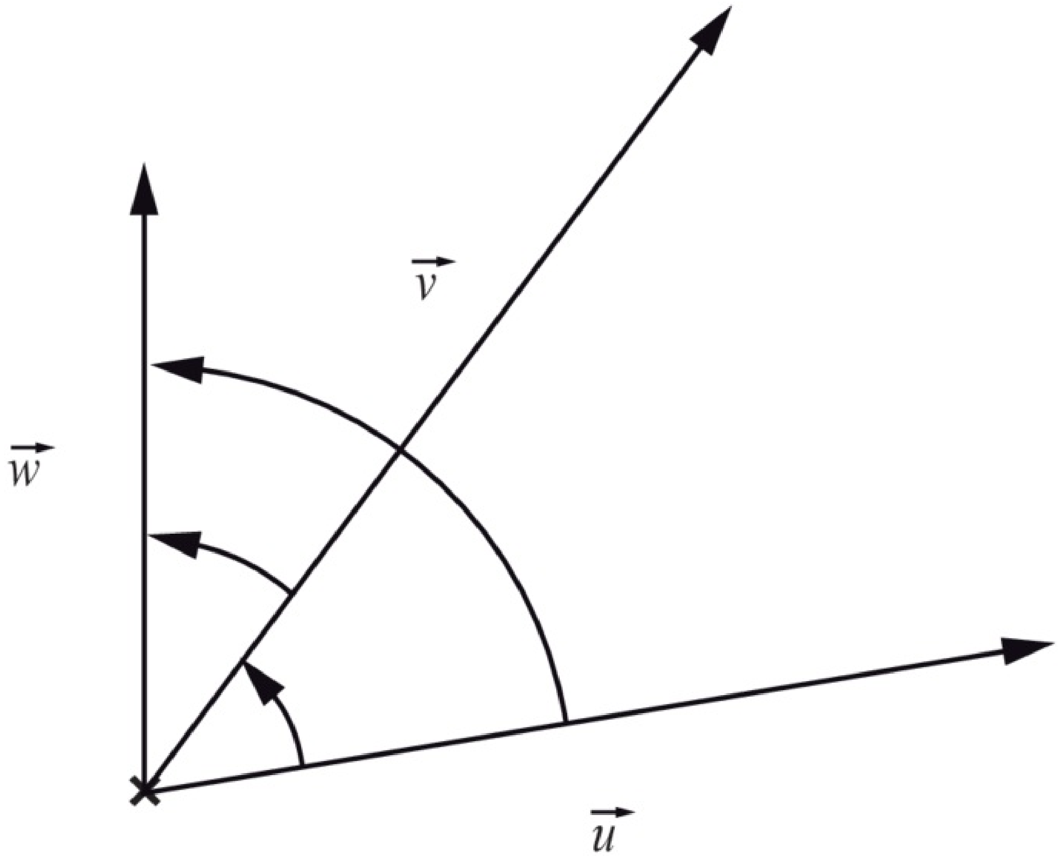
Exercice n°6

## 4. Quelles sont les propriétés des angles orientés ?

**Transformations d'écritures** : Si $u$ et $v$ sont deux vecteurs non nuls du plan alors :
$(-u\ ;\ u) = (u\ ;\ -u) = \pi\ [2\pi]$,
$(v\ ;\ u) = -(u\ ;\ v)\ [2\pi]$,
$(-u\ ;\ -v) = (u\ ;\ v)\ [2\pi]$,
$(-u\ ;\ v) = (u\ ;\ -v) = \pi + (u\ ;\ v)\ [2\pi]$ ou $(-u\ ;\ v) = (u\ ;\ -v) = -\pi + (u\ ;\ v)\ [2\pi]$.




**Relation de Chasles** : Si $u$, $v$ et $w$ sont trois vecteurs non nuls du plan alors : $(u\,;\,v) + (v\,;\,w) = (u\,;\,w)$ $[2\pi]$.

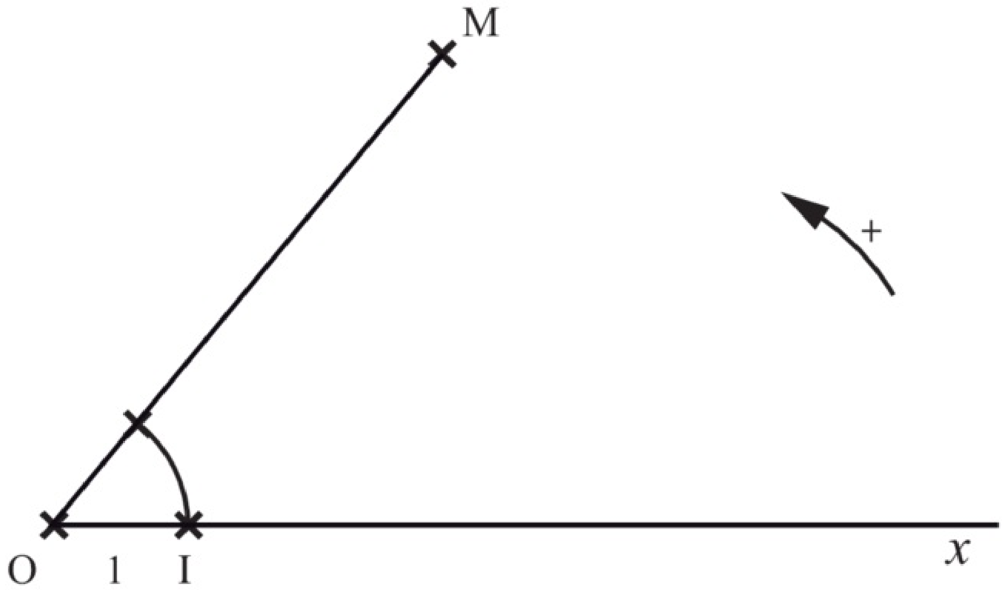



Exercice n°7

Exercice n°8

## 5. Qu'est-ce qu'un repérage polaire ?

Définition : dans un repère du plan, défini par un point origine et deux vecteurs non nuls et non colinéaires, tout point M est repéré par deux coordonnées cartésiennes, son abscisse et son ordonnée.
On peut aussi repérer le point M à l'aide d'une origine O et d'une demi-droite [O*x*) de repère unitaire $\overrightarrow{OI}$, le plan étant orienté dans le sens positif. Le premier paramètre est la longueur OM (le *rayon*) et le second la mesure principale $\alpha$ de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM})$ (l'*azimut*).
Soit M(OM ; $\alpha$ ).

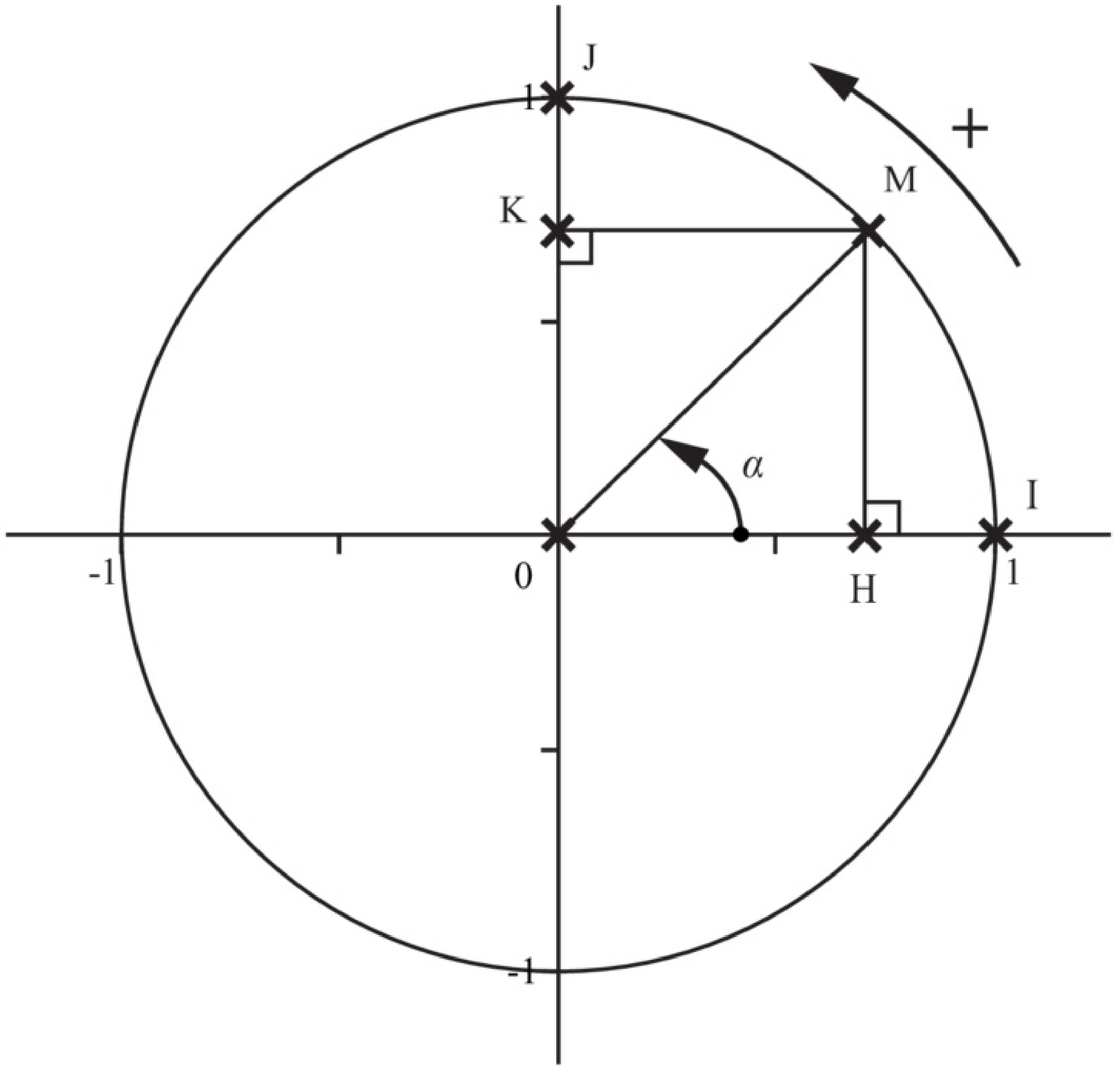



Exercice n°9

Exercice n°10

## 6. Comment déterminer le cosinus et le sinus d'un angle orienté ?

(O ; I ; J) est un repère orthonormé du plan.




M est un point du cercle trigonométrique et $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = \alpha$.

Pour $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, on a : $\cos\alpha = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH$ et $\sin\alpha = OK = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1} = HM = OK$.

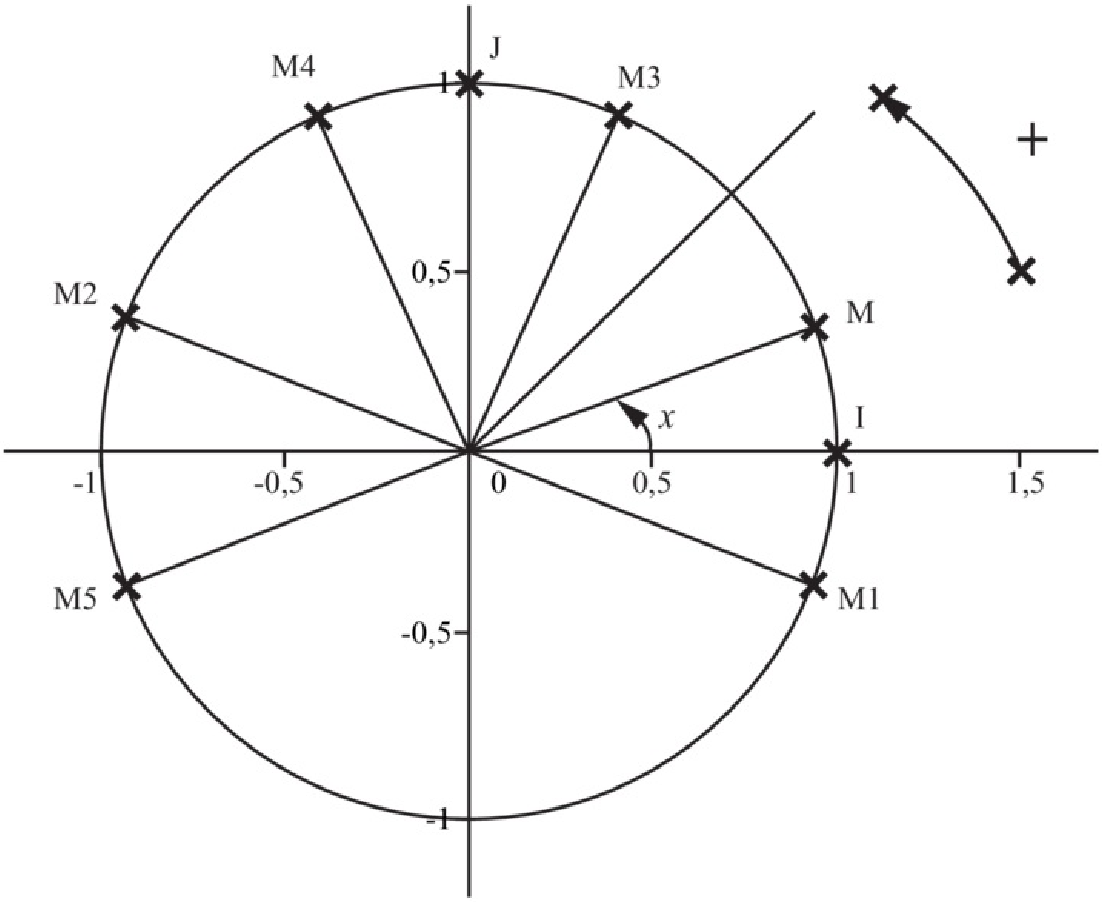
Plus généralement le point M pour coordonnées $M(\cos\,\alpha\,;\,\sin\,\alpha)$.
Le cosinus de l'angle $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM})$ est l'abscisse du point M. Le sinus est son ordonnée.

Exercice n°11

Exercice n°12

## 7. Quels sont les cosinus et sinus des angles associés ?

Soit M un point du cercle trigonométrique de repère orthonormé direct (O ; I ; J).
On pose $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM}) = x$.




**Angles opposés** : soit $M_1$ le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM_1}) = -x$.
Les points M et $M_1$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Donc : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin\,x$.
**Angles supplémentaires** : soit $M_2$ le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM_{2'}}) = \pi - x$.
Les points M et $M_2$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Donc : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin\,x$.
**Angles complémentaires** : soit $M_3$ le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM_3}) = \frac{\pi}{2} - x$.
Les points M et $M_3$ sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ})$. Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\,x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\,x$.
**Angles ayant un écart de** $\frac{\pi}{2}$ : soit $M_4$ le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM_4}) = \frac{\pi}{2} + x$. Le point $M_4$ est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\,x$ (attention au signe « $-$ ») et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\,x$.
**Angles ayant un écart de $\pi$** : soit $M_5$ le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM_5}) = \pi + x$. Les points M et $M_5$ sont symétriques par rapport à O. Donc : $\cos(\pi + x) = -\cos\,x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

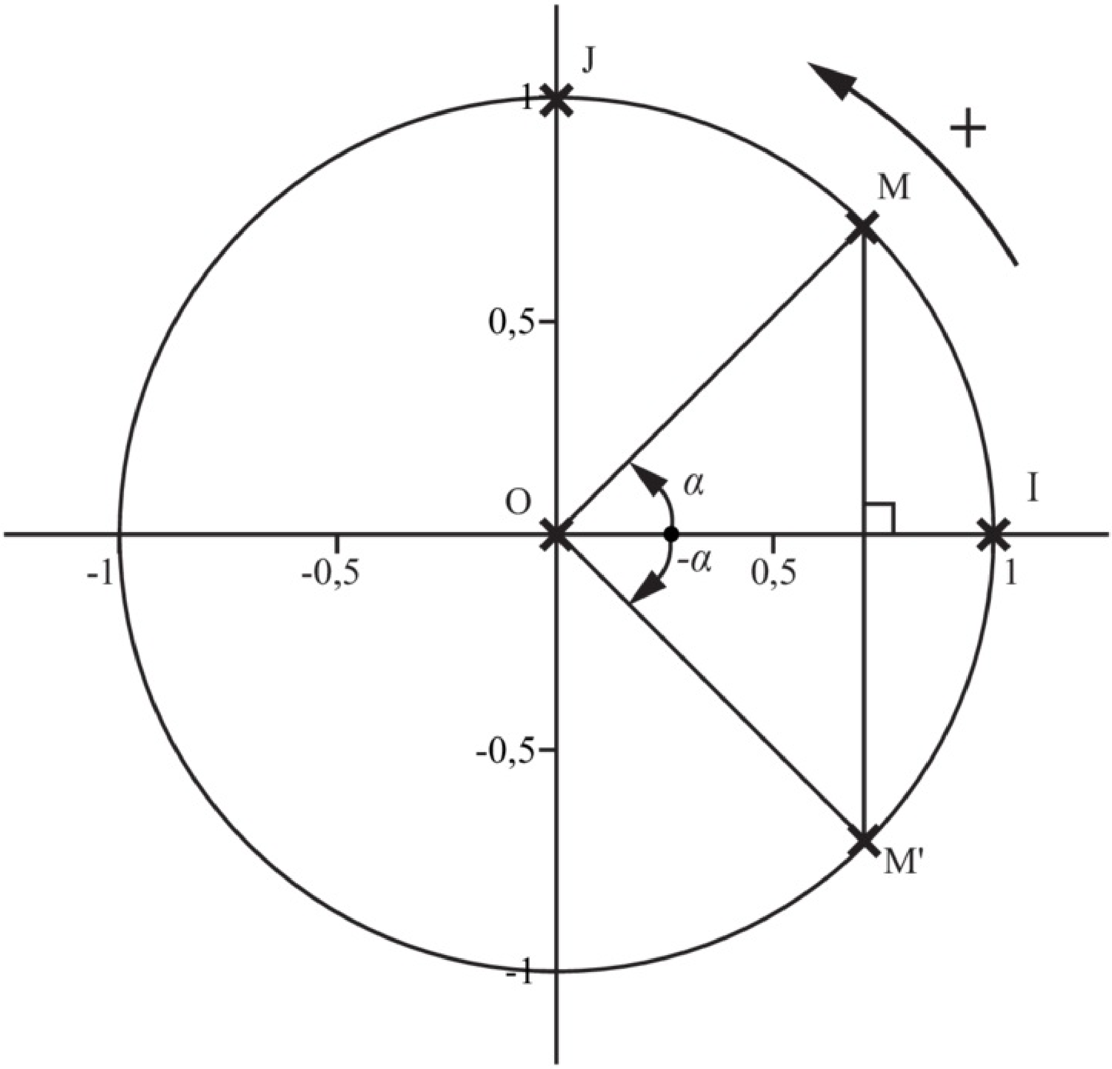
Exercice n°13

Exercice n°14

## 8. Quelles sont les solutions des équations trigonométriques cos $x = a$ ou x = b ?

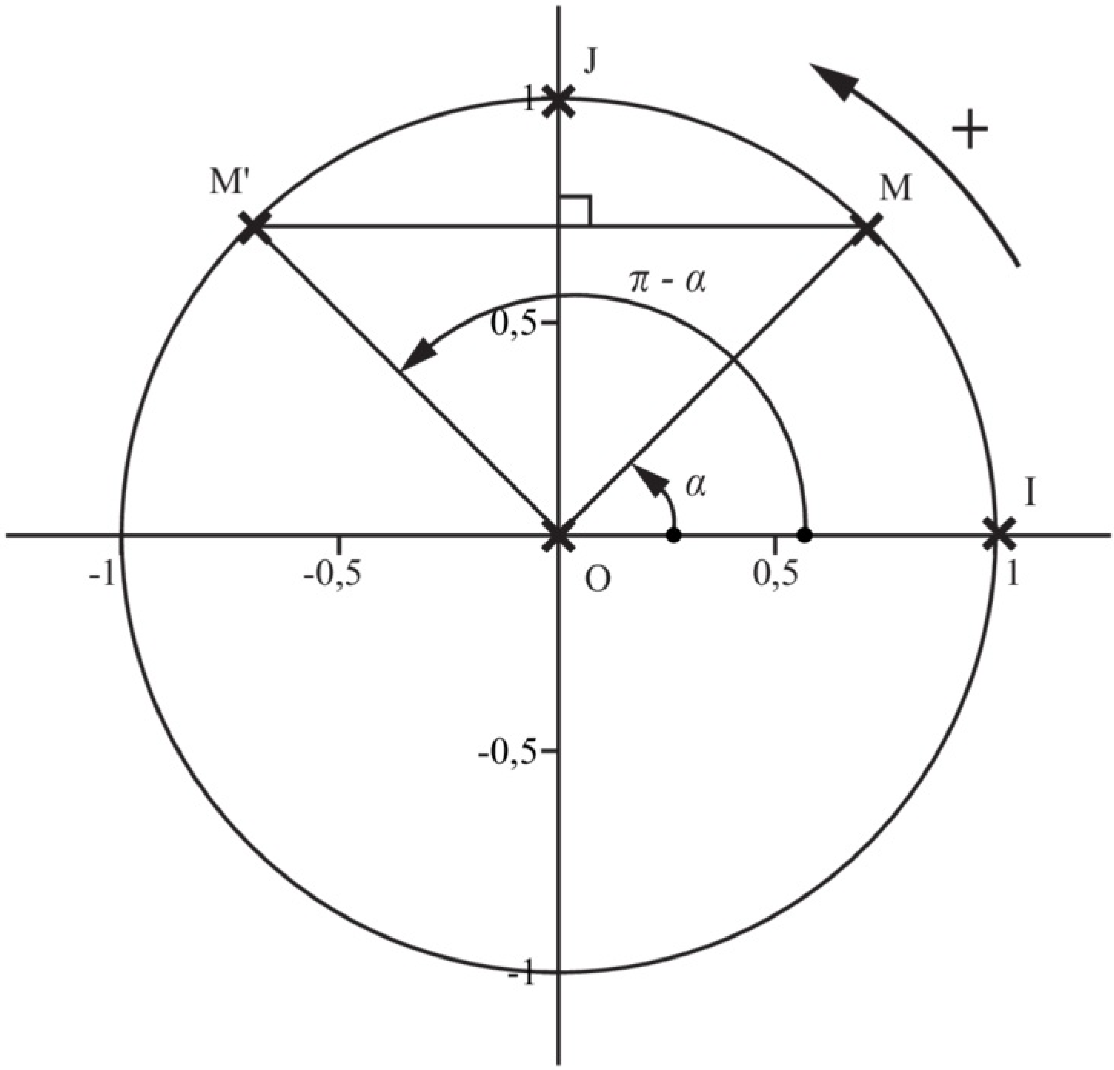
**Égalité de deux cosinus** : soient deux points M et M' du cercle trigonométrique d'un repère orthonormé (O ; I ; J) du plan. Les cosinus des angles $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM'})$ sont égaux si et seulement si les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des

abscisses.
Donc $\cos \alpha' = \cos \alpha$ équivaut à $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ ou $\alpha' = -\alpha + 2k\pi$ ($k \in Z$).




Deux angles orientés ont le même cosinus si et seulement si leurs mesures principales sont égales ou opposées.

**Égalité de deux sinus** : Les sinus des angles $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}')$ sont égaux si et seulement si les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Donc $\sin \alpha' = \sin \alpha$ équivaut à $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ ou $\alpha' = \pi - \alpha + 2k\pi$ ($k \in Z$).



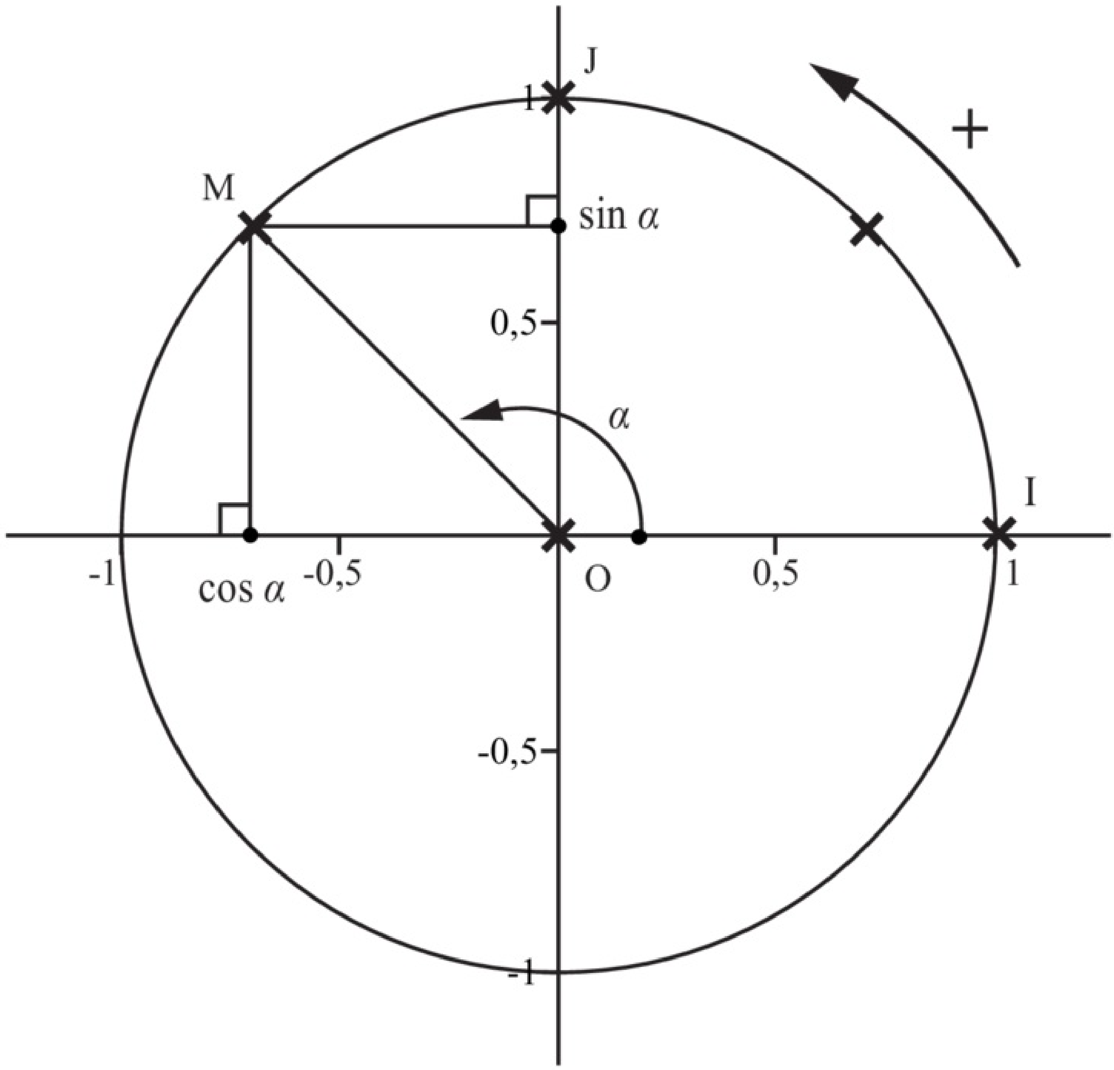

Deux angles orientés ont le même sinus si et seulement si leurs mesures principales sont égales ou supplémentaires.

Exercice n°15

Exercice n°16

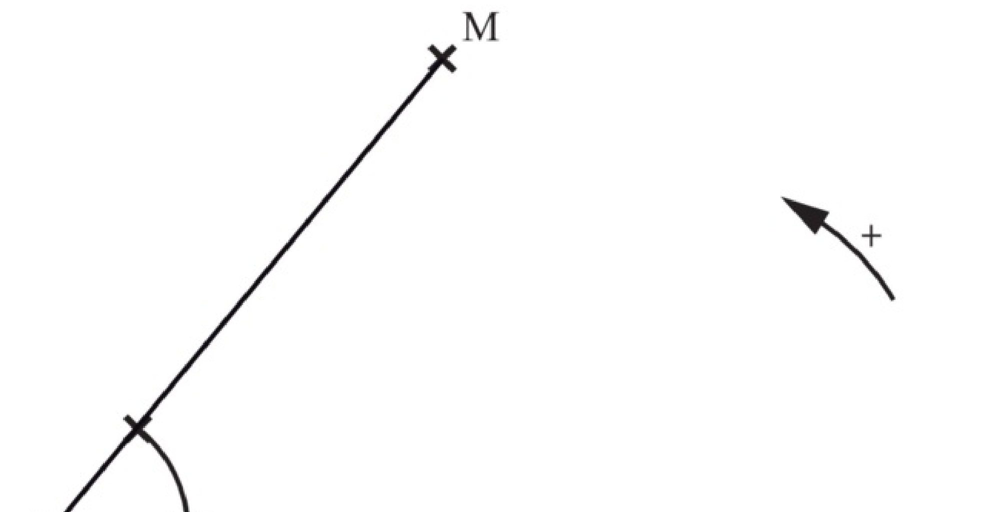
## À retenir

Formule de **conversion : π radians = 180°**
**Longueur de l'arc de cercle** intercepté par un angle au centre de $\alpha$ radians sur un cercle de rayon $r$ : $l = r \times \alpha$.
**Cercle trigonométrique** : Dans un repère orthonormé, c'est le cercle de rayon 1, centré sur l'origine et parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.




**Notation** d'un angle orienté : $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}) \equiv \alpha\,[2\pi]$ (La mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM})$ est égale à $\alpha$ à $2\pi$ près).

**Mesure principale** $\alpha$ d'un angle orienté : $-\pi < \alpha \leq \pi$.
Repérage d'un point M en **coordonnées polaires**, dans un repère composé d'une origine O et d'une demi-droite [O$x$) de repère unitaire $(\overrightarrow{OI})$ :
M(OM ; $\alpha$), avec $\alpha$ mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM})$.




**Relation de Chasles** : $(u\,;\,v) + (v\,;\,w) = (u\,;\,w)\ [2\pi]$.
**Formules des angles associés** :
$\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ ;
$\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$ ;

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ ;
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ ;
$\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$ ;

**Équations trigonométriques** :

$\cos \alpha' = \cos \alpha$ équivaut à $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ ou $\alpha' = -\alpha + 2k\pi$ $(k \in Z)$ ;
$\sin \alpha' = \sin \alpha$ équivaut à $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ ou $\alpha' = \pi - \alpha + 2k\pi$ $(k \in Z)$ .