

## Fiche

Les vecteurs sont des objets géométriques sur lesquels on peut effectuer des calculs : on sait les additionner, les multiplier par un réel. Ici, on définit une nouvelle opération sur les vecteurs : le produit scalaire. À la différence des sommes de vecteurs ou des produits de vecteurs par un réel, le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.

Les applications du produit scalaire sont nombreuses tant en physique (particulièrement en mécanique) qu'en mathématiques : le produit scalaire fournissant une caractérisation particulièrement simple de l'orthogonalité de deux vecteurs, il permet d'établir de nombreuses relations sur les distances et les angles.

### 1. Quelles sont les différentes manières de calculer un produit scalaire ?

- Le produit scalaire de deux vecteurs est **un réel qui peut se calculer de quatre manières** :
  - le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le nombre réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  défini par  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$  ;
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$  ou, si  $\alpha$  est une mesure de l'angle géométrique associé à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , on a aussi :  
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \alpha$  ;
  - dans un repère orthonormal, si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont pour coordonnées respectives  $(x; y)$  et  $(x'; y')$ , alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$  ;
  - si  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$  et si les points C et D se projettent orthogonalement en C' et D' sur la droite (AB) alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$ .
- Pour calculer un produit scalaire **en géométrie non analytique**, on utilise la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs et se ramener ainsi à des calculs de produits scalaires sur des vecteurs orthogonaux ou colinéaires.

### 2. Quels sont les cas particuliers à connaître ?

- Il faut connaître **trois produits scalaires particuliers** :
  - si l'un des deux vecteurs est nul, leur produit scalaire est nul ;
  - deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul ;
  - si deux vecteurs non nuls sont colinéaires, alors :
    - s'ils sont de même sens,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  ;
    - s'ils sont de sens contraire,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .
- Pour montrer que deux droites du plan  $d$  et  $d'$  de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonales**, on montre que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .



Exercice n°1



Exercice n°2

### 3. Quelles sont les propriétés du produit scalaire ?

Pour effectuer des calculs vectoriels avec des produits scalaires, on utilise les propriétés suivantes :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  (on dit que le produit scalaire est symétrique) ;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  ;
- pour tout réel  $k$ ,  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$  ;
- le carré scalaire de  $\vec{u}$  est :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ .

### 4. Comment utilise-t-on le produit scalaire pour déterminer des équations de droites ou de cercles ?

- On appelle **vecteur normal** à une droite  $D$ , de vecteur directeur  $\vec{u}$ , tout vecteur non nul  $\vec{n}$  orthogonal à  $\vec{u}$ . La droite  $D$  passant par A et de vecteur normal  $\vec{n}$  est l'ensemble des points M du plan tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ .

Cette propriété permet de donner une **équation cartésienne de la droite**  $D$  : dans un repère orthonormal, une droite de vecteur normal  $\vec{n}$  de coordonnées  $(a; b)$  a une équation de la forme  
 $ax + by + c = 0$

.

- La notion de produit scalaire fournit deux méthodes pour déterminer une **équation de cercle** :
  - dans le cas où on connaît un diamètre [AB], on utilise la propriété :  
le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M du plan tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  ;
  - dans le cas où on connaît le centre I et le rayon R, on utilise la définition : le cercle de centre I et de rayon R est l'ensemble des

points M du plan tels que  $IM = R$ .

On montre alors que, dans un repère orthonormal, tout cercle a une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

.

## 5. Quelles relations métriques dans le triangle doit-on connaître ?

La notion de produit scalaire permet de démontrer quatre relations métriques dans le triangle qui permettent de calculer des distances ou des angles.

### • La relation d'Al-Kashi.

Soit ABC un triangle quelconque, alors :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{A}.$$

On remarque que si le triangle ABC est rectangle en A, on retrouve ainsi le théorème de Pythagore. C'est pourquoi la relation d'Al-Kashi est parfois appelée théorème de Pythagore généralisé.

Démonstration du théorème d'Al-Kashi :

Soit un triangle ABC quelconque. On note  $\widehat{A}$  l'angle géométrique BAC.

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = BC^2$$

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2 \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \|\overrightarrow{AB}\|^2$$

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos(\widehat{A})$$

Démonstration :

Soit A et B deux points distincts du plan. On cherche l'ensemble des points M vérifiant  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ .

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  signifie que (MA) et (MB) sont perpendiculaires donc AMB rectangle en M.

Donc M appartient au cercle de diamètre [AB].

### • La formule des sinus.

Soit ABC un triangle, alors :  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$ .



Exercice n°3



Exercice n°4

## À retenir

- Il faut absolument penser que le produit scalaire de deux vecteurs est un réel : dans un repère orthonormal, si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont pour coordonnées respectives  $(x; y)$  et  $(x'; y')$ , alors :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .

- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Cette propriété s'utilise pour étudier les positions relatives de droites du plan.

- Dans un triangle, si on connaît les longueurs des trois côtés, ou les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés, ou encore la longueur d'un côté et les deux angles adjacents à ce côté, alors, en utilisant les relations métriques, on est capable de calculer tous les éléments manquants (côtés et angles inconnus, aire du triangle).