Fiche

Pour déterminer la fonction dérivée d'une fonction sur un intervalle donné, on peut revenir à la définition du nombre dérivé en un point a. On calcule alors la limite du taux d'accroissement de cette fonction entre x et a, lorsque x tend vers a. Ce calcul « à la main » est souvent très long et laborieux. Dans la pratique, on calcule une fonction dérivée en utilisant les formules des dérivées des fonctions usuelles, ainsi que les propriétés des opérations sur ces fonctions dérivées.
Les applications de l'étude des fonctions dérivées sont nombreuses. Parmi celles-ci, citons : détermination du sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle, calcul des extrema locaux, des majorants et minorants éventuels, calcul de limites, etc.

1. Quelles sont les fonctions dérivées des fonctions usuelles ?

• La **fonction affine** $f : x \mapsto ax + b$, où a et b sont des réels, est dérivable sur
$\mathbb{R}$
et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto a$.

• La **fonction puissance** $g : x \mapsto x^n$, où $n \in$
$\mathbb{Z}$
, est dérivable sur les intervalles où elle est définie (
$\mathbb{R}$
si $n \geq 0$ et $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ si $n < 0$) et sa fonction dérivée est $g' : x \mapsto nx^{n-1}$.

• La **fonction racine carrée** $h : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sa fonction dérivée est
$h' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

• La **fonction cosinus** $i : x \mapsto \cos x$ est dérivable sur
$\mathbb{R}$
et sa fonction dérivée est $i' : x \mapsto -\sin x$.

• La **fonction sinus** $j : x \mapsto \sin x$ est dérivable sur
$\mathbb{R}$
et sa fonction dérivée est $j' : x \mapsto \cos x$.

• Les deux premiers résultats permettent de retrouver rapidement ceux qui suivent :
– la **fonction constante** $k : x \mapsto \lambda$ où λ est un réel fixé, est dérivable sur
$\mathbb{R}$
et sa fonction dérivée est $k' : x \mapsto 0$;
– la **fonction carré** $l : x \mapsto x^2$ est dérivable sur
$\mathbb{R}$
et sa fonction dérivée est $l' : x \mapsto 2x$;
– la **fonction inverse** $m : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur
$\mathbb{R}$
$- \{0\}$ et sa fonction dérivée est $m' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Exercice n°1

2. Comment calculer la dérivée d'une fonction grâce aux opérations sur les fonctions dérivées ?

• Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ouvert de
$\mathbb{R}$
. On a les propriétés suivantes :
$u + v$
est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
$u \times v$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$.

• De ces propriétés, on déduit les suivantes :
– si v ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{v} = v^{-1}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$;
– si v ne s'annule pas sur I, $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;
– si k est un réel fixé, ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.

Exercice n°2

Exercice n°3

3. Quelle est la fonction dérivée de la fonction composée qui à x associe $g(ax+b)$?

Soit f la fonction affine $x \mapsto ax+b$ où a et b sont des réels, et g une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit J un intervalle ouvert tel que si $x \in J$, alors $f(x) \in I$.
Alors la fonction $h = g \circ f$ définie sur J par $h : x \mapsto g(ax+b)$ est dérivable sur J et, pour tout $x \in J$, $h'(x) = ag'(ax+b)$.

Exercice n°4

Exercice n°5

4. Quel est le lien entre la fonction dérivée f' et le sens de variation d'une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert ?

Le théorème suivant est admis :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert de
$\mathbb{R}$
. On note f' sa dérivée sur I :
- si
$f' = 0$
sur I, alors f est constante sur I ;
- si
f'
> 0 sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points isolés où
$f' = 0$
, alors f est strictement croissante sur I ;
- si
f'
< 0 sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points isolés où
$f' = 0$
, alors f est strictement décroissante sur I.

5. Comment détermine-t-on les extrema locaux éventuels d'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert ?

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a\,;\,b[$ de
$\mathbb{R}$
et x_0 un réel de cet intervalle.
Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum (maximum ou minimum) local en x_0.

Remarques

• Le tableau de variation de f permet de visualiser rapidement ces extrema locaux et également de déterminer si ce sont des extrema absolus.

• La recherche d'extrema locaux est utile pour résoudre des problèmes d'optimisation en sciences physiques, en économie, etc.

Exercice n°6

6. Comment détermine-t-on une majoration, une minoration ou un encadrement d'une fonction sur un intervalle ?

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de
$\mathbb{R}$
.
Un majorant M de f sur I est un réel tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.
Un minorant m de f sur I est un réel tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.
Dans le cas où f admet à la fois un minorant m et un majorant M sur I, alors un encadrement de f sur I est : $m \leq f(x) \leq M$.

Exercice n°7

7. Comment déterminer une valeur approchée de la solution d'une équation ?

Il existe plusieurs algorithmes permettant de déterminer une valeur approchée d'une solution d'une équation : balayage, dichotomie...
La méthode d'Euler utilise le principe de la dérivation.
Algorithme : Méthode de Newton pour résoudre une équation du type f(x)=0
Ici on utilise la fonction $f(x) = 0{,}25x^2 - x - 1$ et on démarre avec $x_0 = 3$.

```python
def test(x):
    return 0.25*x**2-x-1

def testd(x):
    return 0.5*x-1

def newton(f,df,x0,epsilon):
    x=x0
    y=x-f(x)/df(x)
    while abs(y-x)>epsilon:
        x=y
        y=y-f(y)/df(y)
    return y
```

Pour epsilon = 0,001 l'affichage final sera 4.8284271250 49864

Exercice n°5

À retenir

• Il faut connaître les formules de dérivées suivantes :

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \times v)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$ si $n \in \mathbb{Z}$

ou si $n = \frac{1}{2}$

$(f(ax+b))' = af'(ax+b)$