

Fiche

Le concept de dérivée n'a été dégagé qu'il y a environ trois siècles. Il est lié, en mathématiques, à la notion de tangente à une courbe, et en sciences physiques, à celle de vitesse instantanée d'un mobile. Les calculs de dérivées ont de nombreuses applications : ils permettent de déterminer les variations d'une fonction, de résoudre des problèmes d'optimisation, de calculer certaines limites, etc.

1. Comment définir le nombre dérivé d'une fonction en un réel ?

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert et a un réel appartenant à I .

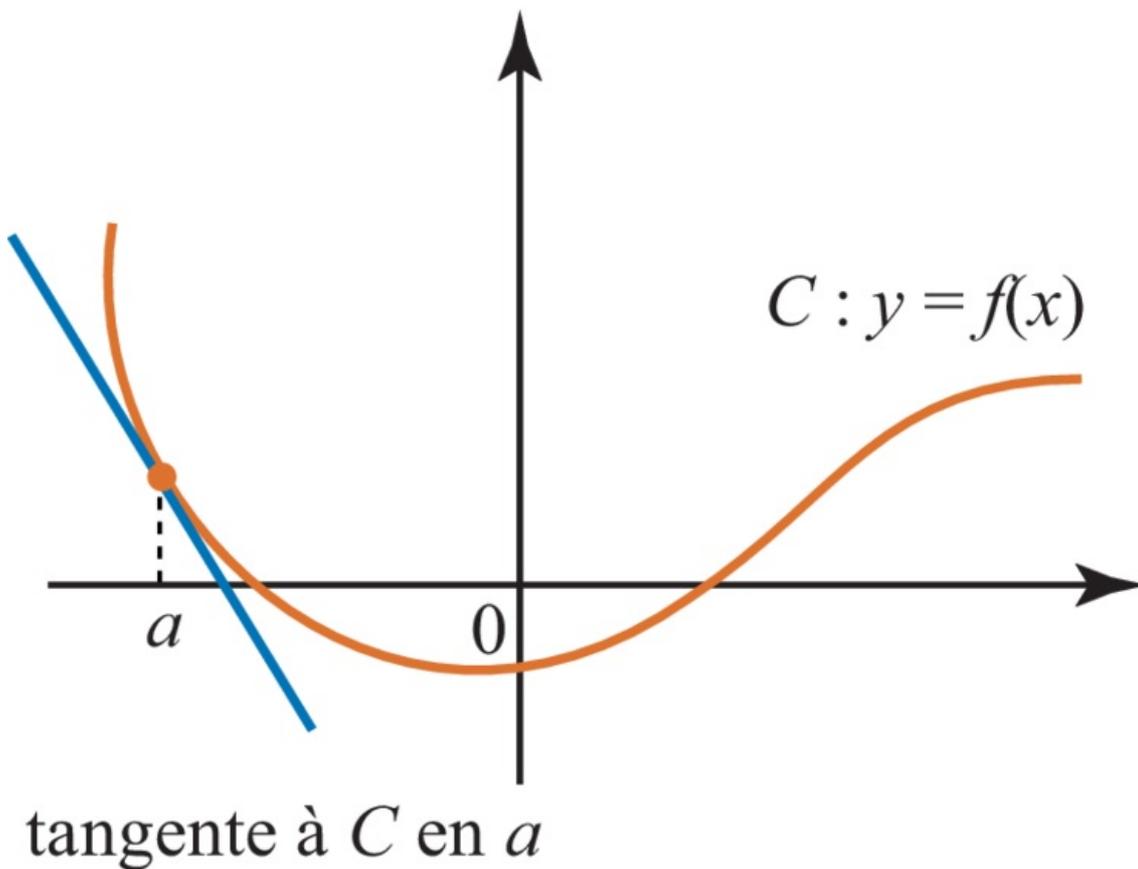
On dit que f est **dérivable en a** si le **taux d'accroissement de f en a** admet une **limite finie** quand x tend vers a . Dans ce cas, ce réel est appelé le **nombre dérivé de f en a** et est noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

 [Exercice n°1](#)

2. Que représente le nombre dérivé d'une fonction en un réel ?

Lorsqu'une fonction f est dérivable en un réel a d'un intervalle ouvert I , le nombre dérivé de f en a , $f'(a)$, est le **coefficient directeur de la tangente** à C , la courbe représentative de f , au point d'abscisse a de C .



 [Exercice n°2](#)

 [Exercice n°3](#)

3. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction, en un point ?

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , dérivable en un réel a de I . On note T la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

Par définition, T est une droite de coefficient directeur $f'(a)$. De plus, T passe par le point $A(a; f(a))$.

En traduisant ces deux conditions, on obtient l'équation de T : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

4. Existe-t-il des fonctions non dérivables en a ?

Exemple 1 :

Étudions la dérivabilité de la fonction racine carrée en 0.

On considère la fonction f définie sur

\mathbb{R}_+ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Pour cela, on étudie la limite du taux d'accroissement de f entre 0 et $0 + h$:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

La limite n'est pas un nombre réel fini. La fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0. Cependant, la courbe admet, au point d'abscisse 0, une demi-tangente verticale.

Exemple 2 :

Étudions la dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0.

On considère la fonction f définie sur

\mathbb{R} par $f(x) = |x|$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

Or, la quantité $\frac{|h|}{h}$ n'a pas de limite en 0. En effet :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

(Les limites à gauche et à droite sont différentes...)

Le taux d'accroissement de la fonction f entre 0 et $0 + h$ n'a pas de limite en 0. Par conséquent la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Cependant, elle est dérivable "à droite" de 0 et "à gauche" de 0.

La courbe admet donc deux demi-tangentes distinctes de coefficients directeurs respectifs 1 et -1

5. Qu'est-ce que la fonction dérivée d'une fonction dérivable sur un intervalle ?

• Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I .

On dit que f est **dérivable sur** I lorsque f est dérivable en tout réel x de I .

• Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

La fonction qui, à tout réel x de I , associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de f sur I . Elle est notée f' .

À retenir

- Une fonction f , définie sur un intervalle ouvert contenant un réel a , est dérivable en a si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a . Ce réel est alors noté $f'(a)$ et appelé le « nombre dérivé de f en a ».
- Dans ce cas, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a . Cette tangente a alors pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Si une fonction f est définie et dérivable en tout réel x d'un intervalle ouvert I , alors la fonction qui, à tout $x \in I$, associe $f'(x)$ est la fonction dérivée de f sur I , elle est notée f' .