Fiche

I. Qu'est-ce qu'une fonction dérivée ?

• **Définition** : Soit une fonction numérique f définie sur un intervalle I et tel que pour tout réel x de I le nombre dérivé de f en x existe.
On dit que la fonction f est dérivable sur I et on appelle fonction dérivée de f la fonction notée f' qui est définie sur I et qui à tout réel x lui associe $f'(x)$.

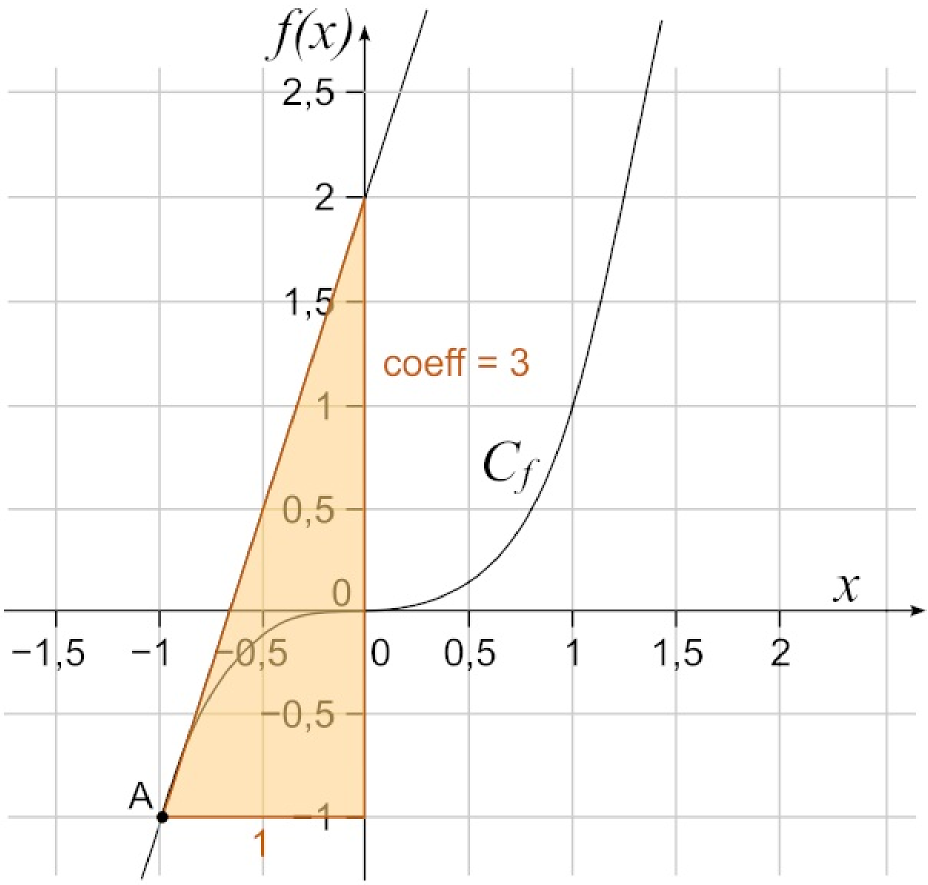
II. Quelles sont les fonctions dérivées à connaître ?

• Les fonctions constantes, la fonction identité, la fonction carré et la fonction cube sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Fonction	Fonction dérivée
$f(x) = k\,(k \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

• Exemple : Déterminons le nombre dérivé de la fonction cube en –1.
Si pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) = x^3$, alors pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2$.
En particulier on a $f'(-1) = 3 \times \left(-1^2\right) = 3 \times 1 = 3$.
Ainsi le nombre dérivé de la fonction cube en –1 est 3.
Cela signifie que la courbe représentative de la fonction cube admet une tangente au point A d'abscisse –1 et que cette tangente possède un coefficient directeur égal à 3.

• On peut le vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul formel en traçant la tangente et en contrôlant la valeur de son coefficient directeur.



Exercice n°1

III. Comment déterminer l'expression de la fonction dérivée d'une fonction polynomiale de degré 3 ?

• Propriété 1 : Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I, alors la fonction $(u + v)$ est dérivable sur I et pour tout x de I $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

• Exemple 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2023$.
En posant $u(x) = x$ et $v(x) = 2023$, on peut affirmer que :

- u est la fonction identité et donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$: $u'(x) = 1$;
- v est une fonction constante et donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$: $v'(x) = 0$.

Ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = 1 + 0 = 1$.

• Propriété 2 : Soit k un réel. Si u est une fonction dérivable sur I, alors la fonction $k \times u$ est dérivable sur I et pour tout x de I $(k \times u)'(x) = k \times u'(x)$.

• Exemple 2 : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1\,492x^3$.
En posant $k = 1\,492$ et $u(x) = x^3$ on peut affirmer que :
u est la fonction cube et donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$: $u'(x) = 3x^2$.
Ainsi la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$: $g'(x) = 1\,492 \times 3x^2 = 4\,476x^2$.

• Exemple 3 : On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 5x^2 + 7x + 3$.
Déterminons l'expression de $h'(x)$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$:

- $h(x) = 5 \times x^2 + 7 \times x + 3$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$:

- $h'(x) = 5 \times 2x + 7 \times 1 + 3 \times 0$
- $h'(x) = 10x + 7$

Exercice n°2

• Remarque : Les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

IV. Comment utiliser la dérivation pour étudier les variations d'une fonction ?

• Propriété fondamentale : Soit f une fonction définie et dérivable sur I.

- Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.
- Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.

• Exemple : Soit la fonction g définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $g(x) = 8x^3 + 13x - 17$.
On cherche à étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire déterminer si g est croissante, décroissante, sur quel(s) intervalle(s), l'existence d'un ou plusieurs extremums...).
g est une fonction polynomiale de degré 3, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$: $g'(x) = 8 \times 3x^2 + 13 \times 1 + 0 = 24x^2 + 13$.

• Or pour tout x de $\mathbb{R}$: x^2
$\geqslant$
0 (le carré d'un réel est positif ou nul).

• Donc pour tout x de $\mathbb{R}$: $24 \times x^2$
$\geqslant$
24×0 donc $24x^2$
$\geqslant$
0.

• Ainsi pour tout x de $\mathbb{R}$: $24x^2 + 13$
$\geqslant$
$0 + 13$. Et on sait que $13 > 0$.

• On a donc prouvé que pour tout x de $\mathbb{R}$:
$$g'(x) \geqslant 0$$
.

On peut donc affirmer que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°3

V. Comment utiliser la dérivation dans des problèmes d'optimisation ?

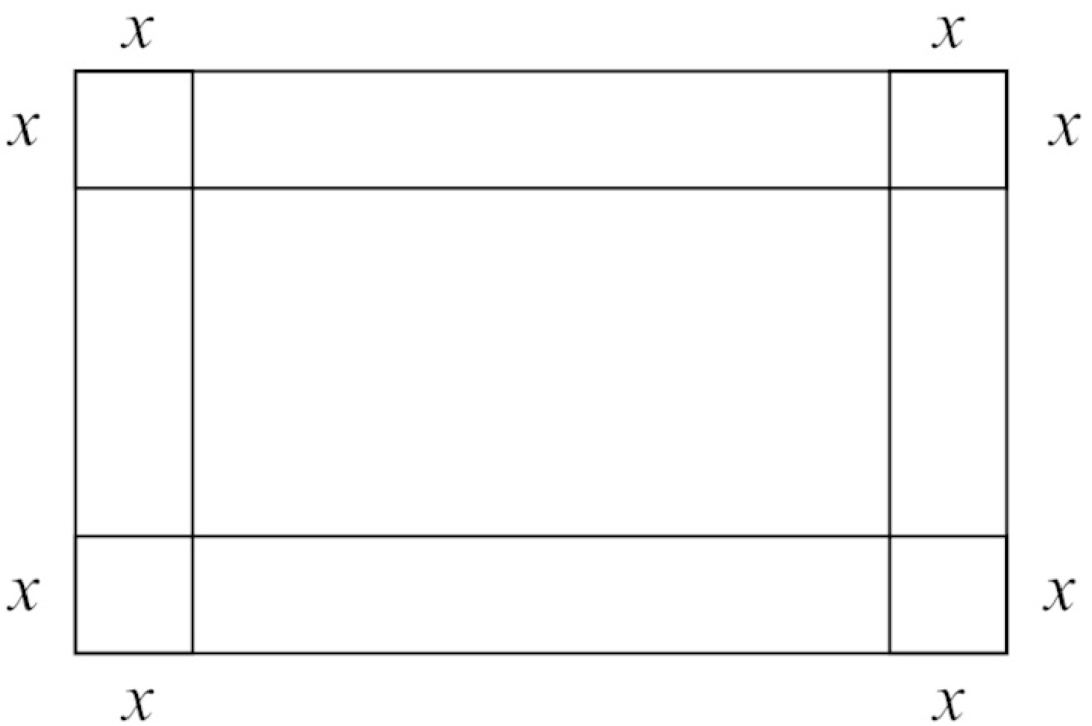
• **Définition** : Soit f définie sur I. Soit c un réel de I.

- Si pour tout x de I $f(c) \geqslant f(x)$, alors on dit que f admet un maximum égal à $f(c)$ qui est atteint lorsque $x = c$.
- Si pour tout x de I $f(c) \leqslant f(x)$, alors on dit que f admet un minimum égal à $f(c)$ qui est atteint lorsque $x = c$.

• Propriété : Soit f définie et dérivable sur I. Soit c un réel de I.

- Si f' s'annule et change de signe lorsque $x = c$, alors f admet un extremum local égal à $f(c)$ atteint lorsque $x = c$.

• Exemple : Une entreprise dispose dans sa réserve d'une très grande quantité de feuilles cartonnées rectangulaires de dimension 80 × 50 cm. Elle souhaite fabriquer une boîte de stockage (ayant la forme d'un pavé droit, mais ouvert sur le dessus) qui possède le volume le plus grand possible pour pouvoir y stocker par la suite des sachets de thé.
Pour cela on va découper dans chaque coin de la feuille un carré identique dont la longueur notée x ne pourra excéder 25 cm.



• Le réel x appartient à l'intervalle [0 ; 25].

• La base du pavé droit sera donc un rectangle de longueur $l = 80 - 2 \times x$ et de largeur $L = 50 - 2 \times x$.

• Soit V la fonction qui à x associe le volume du pavé droit en cm^3.

• Pour tout x de [0 ; 25] : $V(x) = l \times L \times b = (80 - 2x) \times (50 - 2x) \times x$
$V(x) = (80 \times 50 - 80 \times 2x - 2x \times 50 + 2x \times 2x) \times x$
$V(x) = (4\,000 - 160x - 100x + 4x^2) \times x$
$V(x) = 4\,000x - 260x^2 + 4x^3$ est une fonction polynomiale de degré 3 donc dérivable sur [0 ; 25].

• Pour tout x de [0 ; 25] : $V'(x) = 4\,000 - 260 \times 2x + 4 \times 3x^2$
$V'(x) = 12x^2 - 520x + 4\,000$

• En utilisant un logiciel de calcul formel, on a :

Factoriser[12x^2−520x+4000]

→ 4 (x−10) (3x−100)

• Donc $V'(x) = 4\ (x - 10)(3x - 100)$.
$V'(x)$ étant un produit, on doit utiliser un tableau de signes pour pouvoir étudier le signe de $V'(x)$.

• Le premier facteur 4 ne dépend pas de la variable x et c'est un réel strictement positif.

• Le deuxième facteur $x - 10$ est nul lorsque $x = 10$ (en effet $x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 10$) et il est positif lorsque $x \geqslant 10$ (en effet $x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 10$).

• Enfin le troisième facteur $3x - 100$ est nul lorsque $x = \frac{100}{3}$ (en effet $3x - 100 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{100}{3}$) et il est positif lorsque $x \geq \frac{100}{3}$ (en effet $3x - 100 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{100}{3}$).

• $10 \in [0\ ;\ 25]$ mais $\frac{100}{3} \notin [0\ ;\ 25]$. On a donc le tableau de signes suivant :

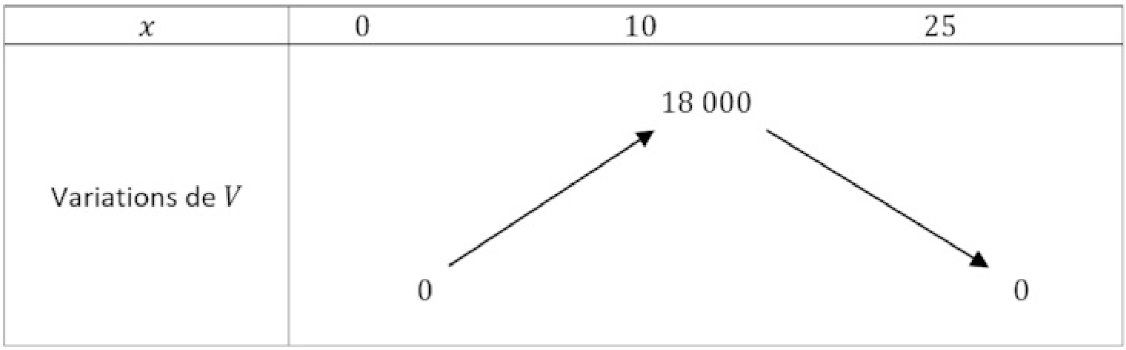
x	0		10		25
4		+	|	+	
$x - 10$		−	0	+	
$3x - 100$		−	|	−	
$V'(x)$		+	0	−	

• On peut lire que V' est positive sur [0 ; 10], ce qui signifie que V est croissante sur [0 ; 10].

• De plus V' est positive sur [10 ; 25], ce qui signifie que V est croissante sur [10 ; 25].

• Enfin V' s'annule et change de signe lorsque $x = 10$, ce qui signifie que V admet un maximum égal à $V(10)$ atteint lorsque $x = 10$.

• On calcule $V(0) = 4\,000 \times 0 - 260 \times 0^2 + 4 \times 0^3 = 0$. On calcule de la même manière $V(10)$ et $V(25)$.
On a donc le tableau de variations suivant :



• Ainsi on peut en déduire que pour fabriquer une boîte avec le volume le plus grand possible, il faut choisir de découper des carrés dont les côtés ont pour longueur 10 cm dans les quatre coins des feuilles cartonnées en réserve. Le volume de la boîte (ouverte sur le dessus) sera de 18 000 cm^3 (ou encore 18 dm^3 c'est-à-dire 18 L).

Exercice n°4

Exercice n°5