Fiche

I. Dans quels types de situations utilise-t-on une suite géométrique ?

• Lorsque l'on observe un **phénomène discret**, si une grandeur change de valeur par étapes en étant toujours multipliée par un même nombre q, alors on pourra modéliser l'évolution de cette grandeur par une suite géométrique.

• Remarque : On a alors un taux d'évolution entre deux valeurs successives qui est constant et égal à $q - 1$.

II. Comment démontrer qu'une suite est géométrique ?

• **Définition** : On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est géométrique de raison q (q un réel) si et seulement si pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = u_n \times q$. On dit que c'est une **relation de récurrence**.

• Exemple : L'INSEE estime que la population française était d'environ 67,8 millions d'habitants en 2022. On souhaite étudier la projection suivante : « La population française augmente de 3 % chaque année. » Pour cela, pour tout n de $\mathbb{N}$ on note p_n la population française (en millions) en $2022 + n$.

• On a donc $p_0 = 67{,}8$. Pour trouver la population en 2023, on doit donc calculer p_1.
D'après l'énoncé : $p_1 = p_0 \times (1 + \frac{3}{100}) = 67,8 \times 1,03 = 69,834$
On a la relation de récurrence suivante :
Pour tout n de $\mathbb{N}$: $p_{n+1} = p_n \times 1{,}03$.
Donc la suite (p_n) est géométrique de premier terme $p_0 = 67{,}8$ et de raison $q = 1{,}03$.

Exercice n°1

III. Quelle est l'expression du terme général d'une suite arithmétique ?

• Propriété : Si (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ et géométrique de raison q (q un réel), alors pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n = \mathrm{u}_0 \times q^n$. On dit que c'est une **relation fonctionnelle**.

• Exemple : Reprenons l'étude de la projection. La suite (p_n) est géométrique de premier terme $p_0 = 67{,}8$ et de raison $q = 1{,}03$. Ainsi pour tout n de $\mathbb{N}$: $p_n = p_0 \times q^n = 67{,}8 \times 1{,}03^n$.

Exercice n°2

IV. Comment étudier le sens de variation d'une suite géométrique ?

• Propriété : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et géométrique de raison q (q un réel). Dans le cas où $u_0 > 0$ et $q > 0$, alors :
- si $q > 1$, alors (u_n) est strictement croissante ;
- si $q = 1$, alors (u_n) est constante ;
- si $0 < q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante.

• Exemple : Soit la suite (p_n) est géométrique de premier terme $p_0 = 67{,}8$ et de raison $q = 1{,}03$.
Comme $67{,}8 > 0$ (premier terme strictement positif) et $1{,}03 > 1$ (raison strictement supérieure à 1), alors (p_n) est strictement croissante.

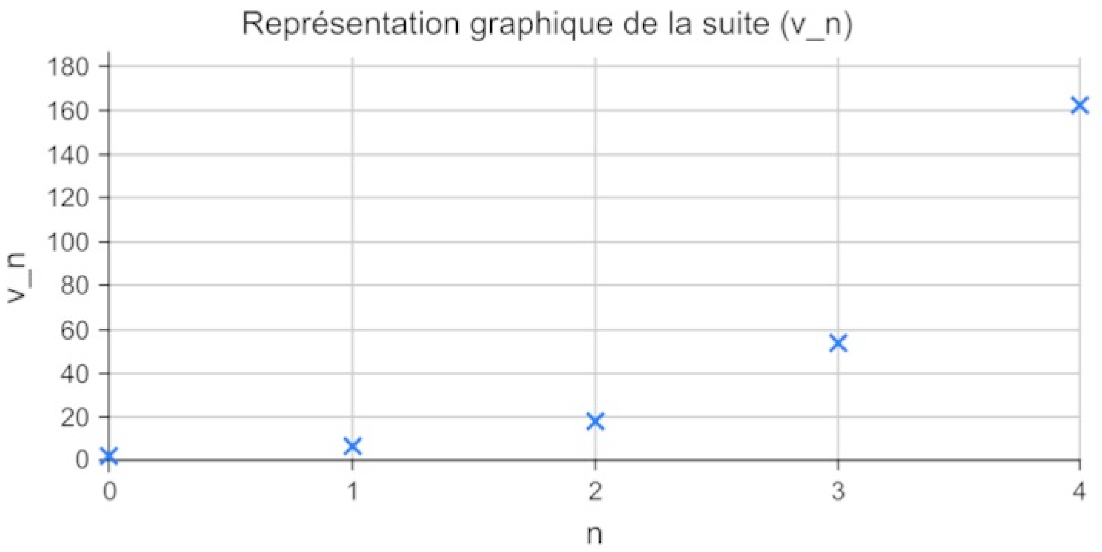
Exercice n°3

V. Comment représenter graphiquement une suite géométrique ?

On munit le plan d'un repère, de préférence orthogonal, voire orthonormé.

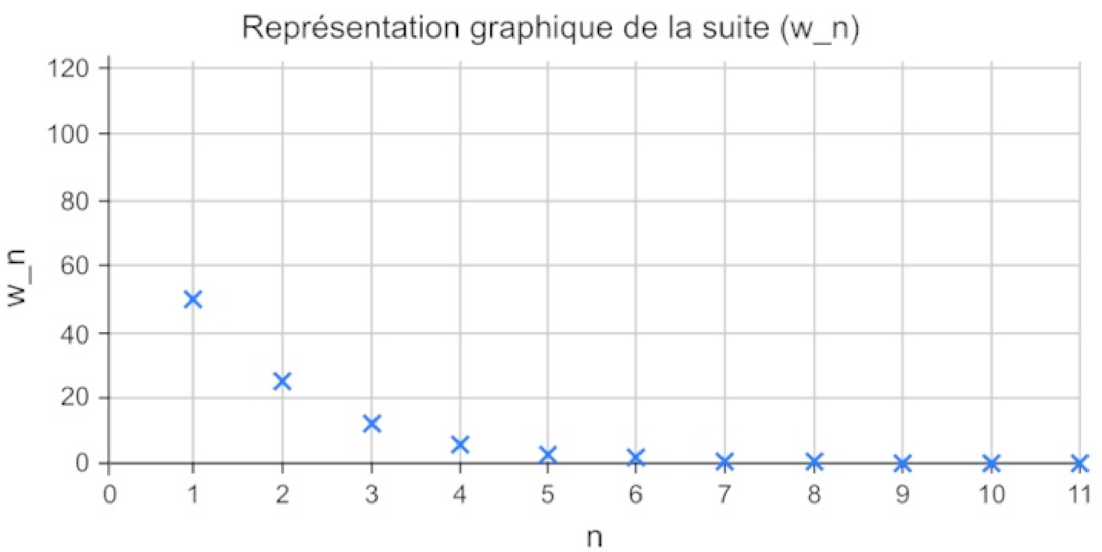
• **Définition** : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et géométrique de raison q (q un réel), alors la représentation graphique de la suite est l'ensemble des points M de coordonnées $M(n ; u_n)$.

• Exemple 1 : Soit la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 3$.
On a donc pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = 2 \times 3^n$.
Donc $v_0 = 2 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2$; $v_1 = 2 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$;
$v_2 = 2 \times 3^2 = 18$; $v_3 = 2 \times 3^3 = 54$.
Donc on va placer les premiers points de la représentation graphique de la suite (p_n) : les points A(0 ; 2), B(1 ; 6), C(2 ; 18) et D(3 ; 54).



• Remarque : On obtient un nuage de points et les points ne sont pas alignés (sauf dans le cas où $q = 1$).

• Exemple 2 : Soit la suite (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = 100$ et de raison $q = 0{,}5$.
On a donc pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = 100 \times 0{,}5^n$.
Donc $w_0 = 100 \times 0{,}5^0 = 100 \times 1 = 100$; $w_1 = 100 \times 0{,}5^1 = 100 \times 0{,}5 = 50$;
$w_2 = 100 \times 0{,}5^2 = 25$; $w_3 = 100 \times 0{,}5^3 = 12{,}5$.
Donc on va placer les premiers points de la représentation graphique de la suite (p_n) : les points A(0 ; 100), B(1 ; 50), C(2 ; 25) et D(3 ; 12,5).



Exercice n°4

VI. Comment résoudre un problème de seuil ?

• Soit a, b et c trois réels (et a non nul).

• Pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a \times b^n > c$, on va utiliser un tableau de valeurs que l'on pourra créer grâce à une calculatrice ou bien un tableur.
On peut aussi utiliser un script du type :

```python
def seuil(u0, q, c):
    n=0
    u=u0
    while u<=c:
        n=n+1
        u=u*q
    return n
```

• Dans ce script :

- u_0 est le premier terme de la suite géométrique ;
- q est la raison de la suite ;
- c est la valeur que l'on souhaite « dépasser ».

• Exemple : L'INSEE estime que la population française était d'environ 67,8 millions d'habitants en 2022.
On souhaite étudier la projection suivante : « La population française augmente de 3 % chaque année. »
Pour cela, pour tout n de $\mathbb{N}$ on note p_n la population française (en millions) en 2022 + n.
On a montré que pour tout n de $\mathbb{N}$: $p_n = p_0 \times q^n = 67{,}8 \times 1{,}03^n$.
D'après la projection, à partir de quelle année la population française dépassera-t-elle 100 millions d'habitants ?

• On réalise un tableau de valeurs.
C'est-à-dire que l'on calcule p_0, p_1, p_2 etc.

	A	B
1	n	p_n
2	0	67,8
3	1	69,834
4	2	71,92902
5	3	74,0868906
6	4	76,309497318
7	5	78,598782238
8	6	80,956745705
9	7	83,385448076
10	8	85,887011518
11	9	88,463621864
12	10	91,11753052
13	11	93,851056435
14	12	96,666588128
15	13	99,566575772
16	14	102,55358335
17	15	105,63019085

• On observe que : $p_{13} < 100 < p_{14}$.
De plus, on a prouvé précédemment que la suite (p_n) est strictement croissante, donc le premier entier naturel n tel que $p_n > 100$ est 14.
Cela signifie qu'en 2022+14, c'est-à-dire en 2036, la population française aura pour la première fois dépassée les 100 millions d'habitants d'après la projection proposée.

Exercice n°5