

## Fiche

### I. Qu'est-ce qu'une suite ?

En seconde, le concept de fonction numérique a été défini.

- Lorsque l'on observe un **phénomène discret**, c'est-à-dire que des observations sont effectuées lors des étapes (première étape, deuxième étape, etc.), alors la fonction que l'on peut utiliser pour modéliser l'évolution du phénomène a son ensemble de définition qui est l'ensemble des entiers (ou une partie de  $\mathbb{N}$ ).

- **Définition** : Une fonction numérique dont l'ensemble de définition est  $\mathbb{N}$  (ou une partie de  $\mathbb{N}$ ) est appelée **suite numérique**.

- Exemple : On s'intéresse à la consommation électrique (en MW) en France les journées de juin 2023 à 8 h. On va considérer la fonction  $c$  qui à  $x$  jours après le 1<sup>er</sup> juin associe la consommation électrique  $c(x)$  en MW en France d'après le site [rte-france.com](http://rte-france.com). La variable étant entière et muette, on la note plus souvent  $n$ .

On a donc les égalités suivantes :

- $c(0) = 43464$
- $c(1) = 43237$
- etc.

L'ensemble de définition de la fonction  $c$  est  $\mathbb{N}$  donc  $c$  est une suite.

- Notations :

- L'image de  $n$  par une suite  $u$  peut être notée  $u(n)$ , mais sera très souvent notée  $u_n$ .
- $u_n$  est le  $(n + 1)$ ème terme de la suite  $u$  (si  $u$  est définie sur  $\mathbb{N}$ ).
- Une suite  $u$  sera très souvent désignée par  $(u_n)$ .

 Exercice n°1

### II. Comment démontrer qu'une suite est arithmétique ?

- **Définition** : On dit qu'une suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  est arithmétique de raison  $r$  ( $r$  un réel) si, et seulement si, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a :  $u_{n+1} = u_n + r$ . On dit que c'est une **relation de récurrence**.

- Exemple : Léonard a emprunté un capital de 3 000 € à sa grand-mère pour acheter un appartement. Pour le remboursement, il choisit de verser 1 % du capital initial de manière mensuelle. Il effectue son premier virement le 16 août 2023. On dit que les **intérêts versés sont simples** (même somme versée chaque mois). Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $c_n$  le capital (en euros) restant à rembourser  $n$  mois après le 16 août 2023.

- Démontrons que la suite  $(c_n)$  est une suite arithmétique (et déterminons ses paramètres : premier terme et raison).

On a  $c_0 = 3\ 000$  car il reste 3 000 euros (capital initial) à rembourser 0 mois après le 16/08/23.

- Calculons ce que représente 1 % du capital initial :  $\frac{1}{100} \times 3\ 000 = 30$ . Léonard verse donc 30 € par mois. (Ainsi  $c_1 = c_0 - 30 = 3\ 000 - 30 = 2\ 970$ ).

- On a donc pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $c_{n+1} = c_n - 30$ .

- Donc la suite  $(c_n)$  est arithmétique de raison  $r = -30$ .

 Exercice n°2

### III. Quelle est l'expression du terme général d'une suite arithmétique ?

- Propriété 1 : Si  $(u_n)$  est une suite définie sur  $\mathbb{N}$  et arithmétique de raison  $r$  ( $r$  un réel), alors pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $u_n = u_0 + n \times r$ . On dit que c'est une **relation fonctionnelle**.

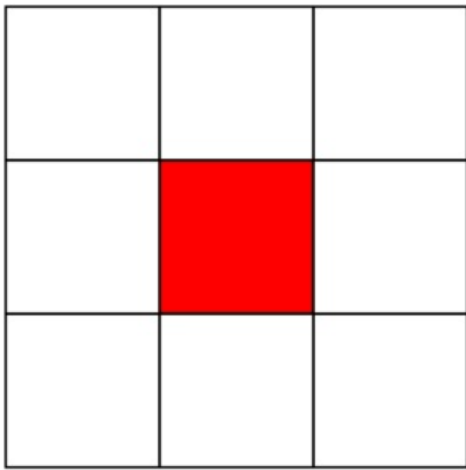
- Exemple : Reprenons la situation de Léonard. La suite  $(c_n)$  est arithmétique de raison  $r = -30$  et de premier terme  $c_0 = 3\ 000$ . Ainsi pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $c_n = 3\ 000 + n \times (-30) = 3\ 000 - 30n$ .

 Exercice n°3

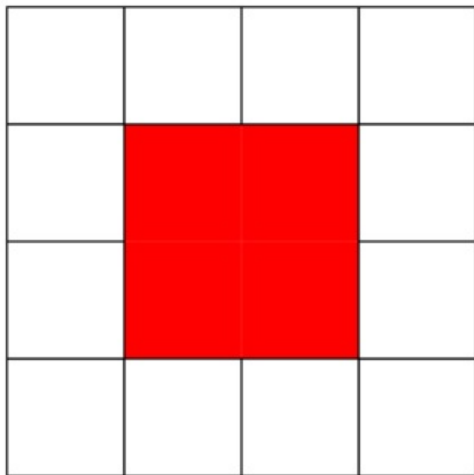
- Propriété 2 : Soit  $(u_n)$  une suite définie sur  $\mathbb{N}$ . Si pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $u_n = x + n \times y$  (avec  $x$  et  $y$  deux réels), alors  $(u_n)$  est arithmétique de premier terme  $u_0 = x$  et de raison  $y$ .

- Exemple : On considère une famille logique de motifs dont les deux premiers sont donnés ici :

Motif n° 1



Motif n° 2



- Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $b_n$  le nombre de carrés blancs dans le motif n°( $n + 1$ ). On observe donc que  $b_0 = 8$  et que  $b_1 = 12$ .
- Le motif n°( $n + 1$ ) comporte  $(n + 3)^2$  carrés dont  $(n + 1)^2$  carrés rouges. Donc le motif n°( $n + 1$ ) comporte  $(n + 3)^2 - (n + 1)^2$  carrés blancs.

Ainsi pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $b_n = (n + 3)^2 - (n + 1)^2$

- $b_n = n^2 + 6n + 9 - (n^2 + 2n + 1)$
- $b_n = n^2 + 6n + 9 - n^2 - 2n - 1$
- $b_n = 4n + 8$
- On a montré que pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $b_n = x + n \times y$  avec  $x = 8$  et  $y = 4$ .
- Donc  $(b_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = 4$  et de premier terme  $b_0 = 8$ .

#### IV. Comment étudier le sens de variation d'une suite arithmétique ?

- Propriété : Soit  $(u_n)$  une suite définie sur  $\mathbb{N}$  et arithmétique de raison  $r$  ( $r$  un réel), alors :
  - si  $r > 0$ , alors  $(u_n)$  est strictement croissante ;
  - si  $r < 0$ , alors  $(u_n)$  est strictement décroissante ;
  - si  $r = 0$ , alors  $(u_n)$  est constante.

- Exemple : Soit  $(b_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = 4$  et de premier terme  $b_0 = 8$ . Comme  $4 > 0$ , alors  $(b_n)$  est strictement croissante.

#### V. Comment représenter graphiquement une suite arithmétique ?

On munit le plan d'un repère, de préférence orthogonal, voire orthonormé.

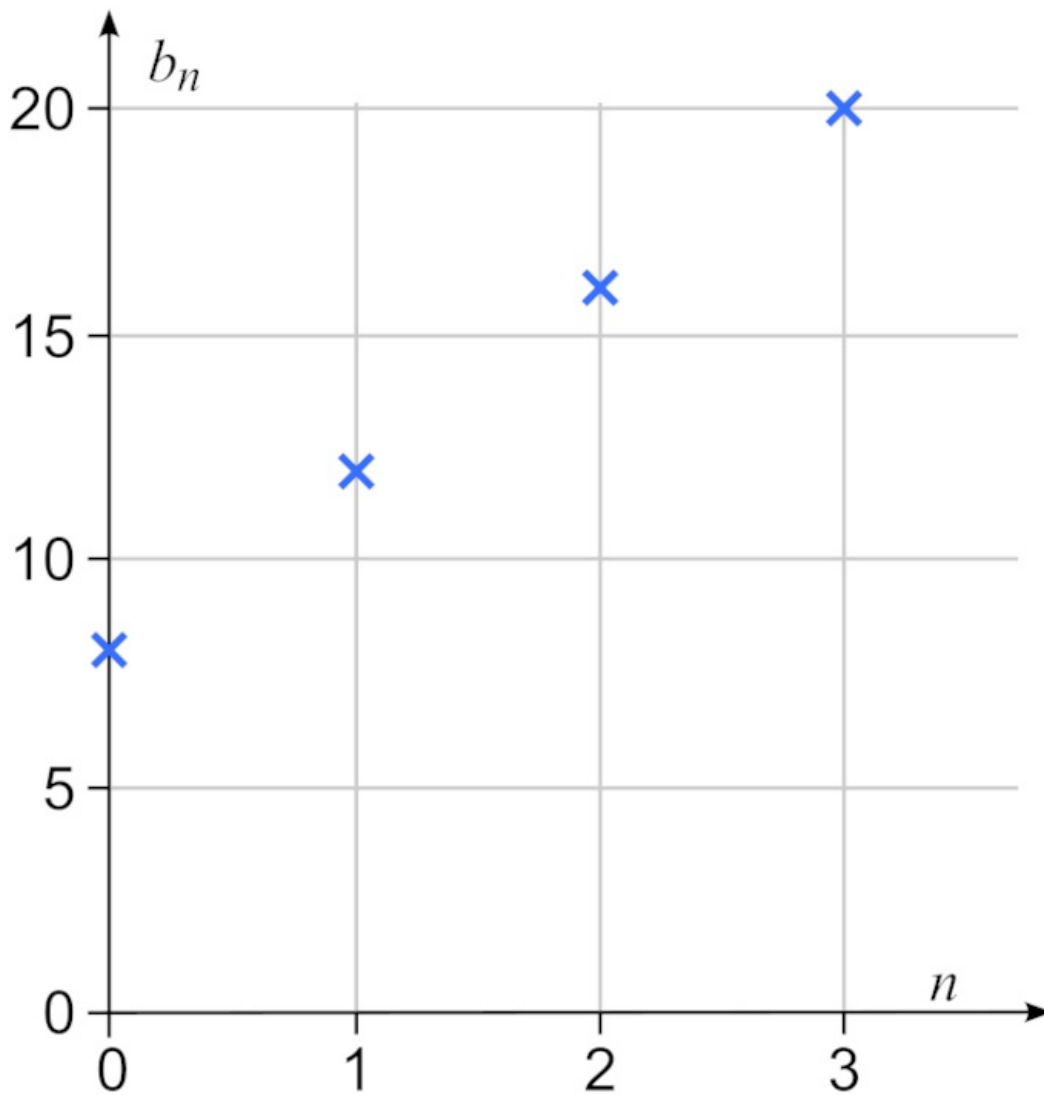
- **Définition** : Soit  $(u_n)$  une suite définie sur  $\mathbb{N}$  et arithmétique de raison  $r$  ( $r$  un réel), alors la représentation graphique de la suite est l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $M(n ; u_n)$ .

- Exemple : Soit  $(b_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = 4$  et de premier terme  $b_0 = 8$ .

On a donc pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $b_n = 8 + 4n$ .

Donc  $b_0 = 8 + 4 \times 0 = 8$  ;  $b_1 = 8 + 4 \times 1 = 12$  ;  $b_2 = 8 + 4 \times 2 = 16$  ;  $b_3 = 8 + 4 \times 3 = 20$ .

Donc on va placer les premiers points de la représentation graphique de la suite  $(b_n)$  : les points A(0 ;8), B(1 ;12), C(2 ;16) et D(3 ;20).



- Remarque : On obtient un nuage de points et les points sont alignés. C'est pour cela que lorsqu'un phénomène est modélisé par une suite arithmétique, on parle d'**évolution linéaire**.

 Exercice n°4

## VI. Comment résoudre un problème de seuil ?

- Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels (et  $a$  non nul). Pour résoudre une équation linéaire du premier degré d'inconnue  $n$  du type  $a \times n + b = c$ , on va procéder ainsi :

$$a \times n + b = c \Leftrightarrow a \times n + b - b = c - b \Leftrightarrow an = c - b \Leftrightarrow \frac{an}{a} = \frac{c-b}{a} \Leftrightarrow n = \frac{c-b}{a}$$

- On devra vérifier que le nombre  $\frac{c-b}{a}$  est bien un entier naturel. On peut aussi utiliser un script du type :

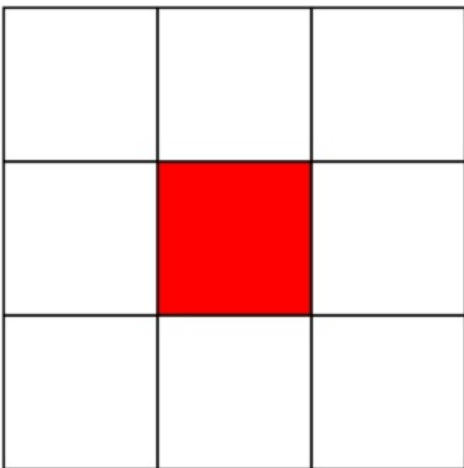
```
def seuil(u0, r, c):
    n=0
    u=u0
    while u!=c:
        n=n+1
        u=u+r
    return n
```

Dans ce script :

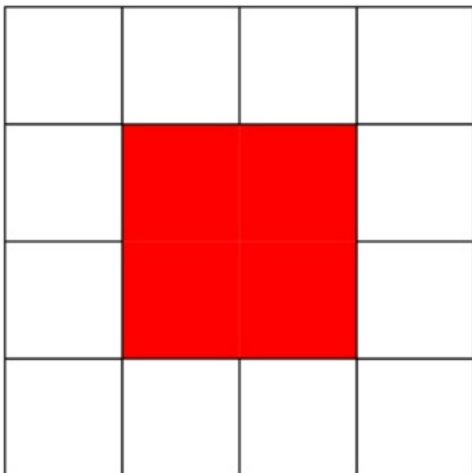
- $u_0$  est le premier terme de la suite arithmétique ;
- $r$  est la raison de la suite ;
- $c$  est la valeur que l'on souhaite atteindre.

Exemple : On considère une famille logique de motifs dont les deux premiers sont donnés ici :

Motif n° 1



Motif n° 2



- Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $b_n$  le nombre de carrés blancs dans le motif n°( $n + 1$ ).
- On observe donc que  $b_0 = 8$  et que  $b_1 = 12$ .
- On a montré que pour tout entier naturel  $n$  :  $b_n = 4n + 8$ .

- Est-il possible de trouver un motif dont le nombre de carrés blancs sera égal à 1 492 ?

On doit donc résoudre l'équation :  $b_n = 1\,492$ .

$$4n + 8 = 1\,492 \Leftrightarrow 4n + 8 - 8 = 1\,492 - 8 \Leftrightarrow 4n$$

$$= 1\,484 \Leftrightarrow \frac{4n}{4} = \frac{1\,484}{4} \Leftrightarrow n = 371$$

371 est bien un entier. Donc  $b_{371} = 1\,492$ . Cela signifie que le motif n°(371 + 1) soit le motif n° 372 comporte exactement 1 492 carrés blancs.

- Remarque : on peut aussi avoir besoin de résoudre des inéquations du type  $a \times n + b > c$ .

- Si  $a > 0$ , alors  $a \times n + b > c \Leftrightarrow n > \frac{c-b}{a}$
- Si  $a < 0$ , alors  $a \times n + b > c \Leftrightarrow n < \frac{c-b}{a}$

 Exercice n°5