Fiche

Beaucoup d'équations du second degré se résolvent facilement, il suffit de les présenter sous forme d'un produit de facteurs égal à 0. L'application de la règle : « un produit de facteurs est nul lorsque l'un de ses facteurs est nul » permet de connaître les solutions.
Mais comment peut-on savoir qu'une équation n'a pas de solution et n'est donc pas factorisable ? Et si des solutions existent, comment peut-on les déterminer sans factorisation ? Des formules permettent de répondre à ces questions. Il faut bien les connaître pour pouvoir les appliquer sans faire d'erreur de calcul.
Il ne faut pas oublier également qu'une fonction polynôme du second degré se représente toujours par une parabole. De la position de cette parabole par rapport à l'axe des abscisses, on peut déduire si la fonction s'annule et quels sont les intervalles où son signe est constant.

1. Comment détermine-t-on le nombre de solutions d'une équation du second degré ?

• Pour résoudre une équation du second degré, on transpose tous les termes dans**un seul membre** pour obtenir une écriture de la forme :
$ax^2 + bx + c = 0$
.
On calcule alors **le discriminant Δ** (delta) : $\Delta = b^2 - 4ac.$
Trois cas peuvent se produire :

- si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution ;
- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution ;
- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions.

Exercice n°1

2. Comment calcule-t-on les solutions d'une équation du second degré lorsqu'elles existent ?

• Si l'on sait factoriser le membre de gauche de l'équation, on cherche les valeurs qui annulent chacun des facteurs.

• Si l'on ne sait pas factoriser, **les solutions sont données par les formules** suivantes :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
La forme factorisée de l'équation
$ax^2 + bx + c = 0$

s'écrit alors $a\,(x-x_1)\,(x-x_2)=0$.

Remarque

Si $\Delta=0$, la **solution unique** est : $x_1=\frac{-b}{2a}$.
La forme factorisée s'écrit alors : $a(x-x_1)^2$.

Exercice n°2

3. Quel algorithme pour résoudre une équation du second degré ?

Algorithme
Variables a, b, c , D, x, y : nombres réels
Début
Lire a, b, c
D ← b^2 –4ac
Écrire D
Si D < 0 **Alors**
Écrire « Pas de solution »
Sinon
$x \leftarrow (-b-\sqrt{D})/(2a)$
Écrire x
$y \leftarrow (-b+\sqrt{D})/(2a)$
Écrire y
Fin Si
Fin

Sur TI 82	**Sur Graph 25**
Input A	A
Input B	B
Input C	C
	B^2 – 4*A*C $\rightarrow$ D
B^2 – 4*A*C Sto D	◆
Disp D	If D < 0
If D < 0	Then "PAS DE SOLUTION"
	Else (–B –$\sqrt{D}$)/(2A) $\rightarrow$ X
Then	◆
	(–B +$\sqrt{D}$)/(2A) $\rightarrow$ Y
Disp "PAS DE SOLUTION"	◆
Else (–B – $\sqrt{D}$)/(2A) $\rightarrow$ X	Ifend

Disp X
$(-B+\sqrt{D})/(2A) \rightarrow Y$
Disp Y
End

Exercice n°3

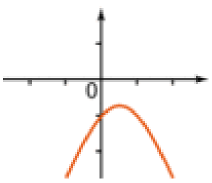
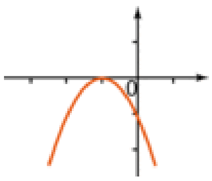
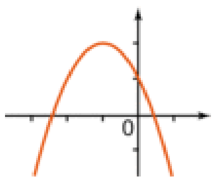
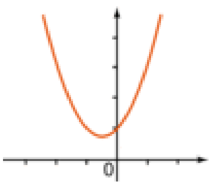
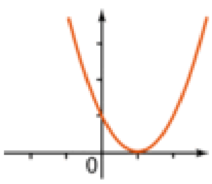
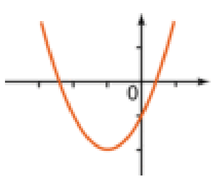
4. Comment résoudre graphiquement une équation du second degré ?

La **parabole** d'équation $y = ax^2 + bx + c$ peut couper l'axe des abscisses en un point, deux points ou pas du tout. Les abscisses des points d'intersection, lorsqu'ils existent, sont les solutions de l'équation
$ax^2 + bx + c = 0$
.

Exercice n°4

5. Comment connaître le signe d'une fonction du second degré ?

• Le signe d'une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ dépend du signe de *a* et du signe du discriminant Δ.

a < 0 et Δ< 0	*a* < 0 et Δ= 0	*a* < 0 et Δ> 0
		
a > 0 et Δ< 0	*a* > 0 et Δ= 0	*a* > 0 et Δ> 0
		

• Si $\Delta \leq 0$, alors *f*(*x*) est du signe de *a*.
Si Δ> 0, alors *f*(*x*) est :

- du signe de *a* à **l'extérieur des racines** x_1 et x_2 (c'est-à-dire sur les intervalles $]-\infty\ ;\ x_1]$ et $[x_2\ ;\ +\infty[$, si $x_1 \leq x_2$) ;
- du signe opposé à celui de *a* à **l'intérieur des racines** (sur l'intervalle $[x_1\ ;\ x_2]$

).

Exercice n°5

6. Comment résoudre une inéquation du second degré ?

On transpose d'abord tous les termes de l'inéquation dans un seul membre pour obtenir une écriture de la forme $ax^2+bx+c\leq 0$ ou de la forme $ax^2+bx+c\geq 0$.
On calcule ensuite le discriminant Δ ($\Delta = b^2 - 4ac$) :

- si $\Delta\leq 0$ alors ax^2+bx+c est du signe de a ;
- si $\Delta > 0$ alors ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2, et du signe opposé à celui de a à l'intérieur des racines x_1 et x_2.

Exercice n°6

À retenir

• Résoudre une équation du second degré
$ax^2+bx+c=0$
c'est, sauf factorisation évidente, appliquer des formules : formule du discriminant et formules des solutions éventuelles. Ces formules sont sujettes à erreurs de calcul. Pour les éviter, on écrira à part les valeurs de a, de b et de c et on notera entre parenthèses les coefficients négatifs du discriminant.

• En interprétant la position de la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ par rapport à l'axe des abscisses, on vérifie graphiquement le nombre de solutions et leurs valeurs approchées éventuelles. De là, on peut déduire les ensembles solutions des inéquations $ax^2+bx+c\leq 0$ ou $ax^2+bx+c\geq 0$.